Parabol – Trigonometri – Olasılık
Problemini halletmek isteyenler için

ANTRENMANLARLA
MATEMATİK

Üçüncü Kitap

Halil İbrahim KÜÇÜKKAYA
Matematik Bire Bir Öğretim Uzmanı

Ahmet KARAKOÇ **Mehmet GİRGİÇ**

Ümitli Kurbağa

Bir kurbağa sürüsü ormanda yürürken, içlerinden ikisi bir çukura düştü. Diğer bütün kurbağalar çukurun etrafında toplandılar. Çukur bir hayli derindi ve arkadaşlarının zıplayıp dışarı çıkması mümkün görünmüyordu.
Yukarıdaki kurbağalar, boşuna uğraşmamalarını söylediler arkadaşlarına:
"Çukur çok derin, dışarı çıkmanız imkânsız."
Ancak, çukura düşen kurbağalar onların söylediklerine aldırmayıp çukurdan çıkmak için mücadeleye devam ettiler. Yukarıdakiler ise hala boşuna çırpınıp durmamalarını, ölümün onlar için kurtuluş olduğunu söylüyorlardı.
Sonunda kurbağalardan birisi söylenenlerden etkilendi ve mücadeleyi bıraktı. Diğeri ise çabalamaya devam etti. Yukarıdakiler de, çırpınıp durarak daha çok acı çektiğini söylemeyi sürdürdüler.
Ne var ki, çukurdaki kurbağa son bir hamle daha yaptı, bu kez daha yükseğe sıçramayı başardı ve çukurdan çıktı.

Çünkü bu kurbağa sağırdı. O yüzden, arkadaşlarının ümit kırıcı sözlerine kulak asmamıştı.

Siz de etrafınızdakilerin olumsuz düşüncelerine kulaklarınızı kapatın.
*Ve **"Ümidinizi kaybetmeyin ve bilin ki ümidini kaybeden insanın kaybedeceği başka şeyi kalmamıştır."***
Kararlı olun ve başarı kapısını sabırla çalın. Sizden öncekilere nasıl açılmışsa size de öyle açılacaktır. Emin olun.

Üçüncü Kitapta Neler Var?

Hatalarınızdan ders çıkarmak akıllıca bir şeydir.
Başkalarının hatalarından
ders çıkarmak daha akıllıca bir şeydir.
Hillel Segal

Matematikte zekâdan önce sabır gelir.

Cahit Arf

Kümeler

Başarı bir yolculuktur, bir varış noktası değil.

Ben Sweetland

KÜMELER

Aslında hepinizin en az bir kaç defa dinlediği ve acayip derecede iyi olmasa bile fena olmadığınız bir konu bu. İlköğretimden beri anlatılıyor ne de olsa.

- **Küme,** iyi tanımlanmış nesneler topluluğudur. (Herkesin aynı şeyi anlayacağı şekilde tanımlanmış.)
- Kümeyi oluşturan nesnelere **kümenin elemanları** denir. x elemanı A kümesine aitse $x \in A$ ile, A kümesine ait değilse; $x \notin A$ le gösterilir.
- A kümesinin eleman sayısı, s(A) ile gösterilir.

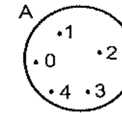
Kümeler Nasıl Gösterilir?

Üç farklı biçimde gösterilebiliyor kümeler.

Küçücük bir örnekle izah edeyim. Örneğin 5 ten küçük doğal sayıların kümesi A olsun. Bu küme

Liste Yöntemiyle A = {0, 1, 2, 3, 4} şeklinde

Venn Şemasıyla



Ortak Özellik yöntemiyle $A = \{x \mid x < 5 \text{ ve } x \in N\}$ şeklinde gösterilir. Yani, A kümesi x lerden meydana gelmiş fakat bu x ler 5 ten küçük ve doğal sayı imiş.☺

Örnek Soru

$A = \{x \mid -4 < x < 13,\ x = 3n,\ n \in Z\}$

olduğuna göre s(A) kaçtır?

Çözüm

Bir kümenin eleman sayısını bulacaksanız ilk önce elemanları listeleyin.

Burada A kümesi – 4 ile 13 arasında ve 3 ün katı olan sayılardan oluşmuş.

Dolayısıyla A = {–3, 0, 3, 6, 9, 12} dir. Eleman sayısının 6 olduğunu söylersiniz artık.

Eşit küme

Aynı elemanlardan oluşan kümeler eşittir.

Alt Küme

Bir B kümesinin bütün elemanları A kümesinin de elemanı ise **B kümesi A kümesinin bir alt kümesidir.**

Bu $B \subset A$ (B kümesi A kümesinin alt kümesidir.) ile gösterilir. Eğer B kümesi A nın alt kümesi değilse bu $B \not\subset A$ şeklinde ifade edilir.

Alt Küme ile ilgili Özellikler

- $\emptyset \subset A$ (Boş küme her kümenin alt kümesidir.)
- $A \subset A$ (Her küme kendisinin bir alt kümesidir.)
- $A \subset B$ ve $B \subset C$ ise $A \subset C$ dir.
- $A \subset B$ ve $B \subset A \Leftrightarrow A = B$ dir.

Örneğin,

A = {a, b, c} kümesinin alt kümelerini bulalım.

0 elemanlı alt kümeleri: { }

1 elemanlı alt kümeleri: {a}, {b}, {c}

2 elemanlı alt kümeleri: {a,b}, {a,c}, {b,c}

3 elemanlı alt kümeleri: {a,b,c}

olmak üzere hepsi 8 tanedir. Ama alt kümeleri her zaman bu şekilde bulmak zor tabii ki. Meselâ burada A kümesinin 3 değil de 10 elemanı olsaydı? İşte o zaman işin rengi değişir.

Bir kümenin 2, elemanlı, 3 elemanlı, ... alt kümelerini bulmak için biraz kombinasyon bilmek lâzım. En azından şu söyleyeceklerimi bilin.

- **$r \le n$ olmak üzere n elemanlı bir kümenin r elemanlı alt kümelerinin sayısı n-nin r-li kombinasyonlarının sayısı kadardır.**

  Ve $C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$ **dir.**
- **n elemanlı bir kümenin bütün alt kümelerinin sayısı 2^n dir.**

Bu olayı açayım biraz.

5 elemanlı bir kümenin 2 elemanlı alt kümelerinin sayısı $\binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 1 \cdot 2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$ dur.

Aynı şekilde 9 elemanlı bir kümenin 3 elemanlı alt kümelerinin sayısı ise

$\binom{9}{3} = \frac{9!}{(9-3)! \cdot 3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$ tür.

Pırt. olarak. $\binom{8}{2} = \frac{8.7}{1.2} = 28$

$\binom{9}{4} = \frac{9.8.7.6}{1.2.3.4} = 126$

$\binom{10}{3} = \frac{10.9.8}{1.2.3} = 120$

Anlaşıldı mı bu olay. Üstte kaç sayı varsa altta da o kadar sayı olacak. Ve payda hep 1 den başlar.

Örnek Soru

A = { a, b, c, d, e, f }

kümesinin alt kümelerinin kaçında

a) a bulunmaz?
b) a bulunur?
c) a ve b bulunur?
d) a bulunur, b bulunmaz?

Çözüm

Alt küme soruları içinde en önemlilerinden biri bu.

a) Gayet kolay.☺
Yazılacak alt kümede a olmayacağına göre, a yı sallayın.☺ Geriye kaldı 5 eleman. Bu 5 elemanla yazabileceğiniz alt kümelerin hiç birinde a yoktur.
Bu da $2^5 = 32$ tanedir.

b) Bu da çok kolay ki.☺
Kaç alt kümede a yoksa o kadarında da vardır. Niye mi? İçinde a olmayan alt kümeleri yazın ve her birine a eklediğinizi düşünün.

c) Yine aynı mantığı kullanalım.
a ve b elemanlarının bulunmadığı kaç alt küme varsa o kadarında da a ve b bulunacak demektir. Bu da a ve b yi çıkararak kalan 4 elemanla yazılabilecek alt küme sayısı kadar yani, 16 tanedir.

d) Mantığımız yine aynı.
A kümesinden hem a hem de b yi çıkarıp geriye kalan {c, d, e, f} elemanlarıyla yazacağımız alt kümelerde a ve b yoktur. Bu alt kümelerin içine sadece a yı eklediğinizi düşünün. (b yi eklemeyin☺) Bu da 16 tane olur yine.
Kısacası bu tür sorularda hem alt kümede olmasını istediğiniz elemanı hem de olmasını istemediğinizi çıkarın. Geri kalan elemanlarla yazabileceğiniz alt küme sayısı kaç ise cevap o dur.

Örnek Soru

A = {a, b, c, d, e, f, g }

kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinin kaçında

a) a bulunmaz?
b) a bulunur?
c) a ve b bulunur?
d) a bulunur, b bulunmaz?

Çözüm

2 elemanlı, 3 elemanlı , ... alt kümelerinin sayısı söz konusu ise elemanlar arasından istenilen sayıda elemanı seçmek gerektiğinden işin içine kombinasyon olayı girer.
Ama endişe etmenize gerek yok. Bu soruların hem mantığı hem de çözümü acayip kolay.☺ Bakın şimdi☺

a) Kümede 7 eleman var. Bize 3 tanesi lâzım. Ama içlerinde a olsun istemiyoruz. Pekâlâ, a yı atalım o zaman. Ve geriye kalan 6 eleman arasından yani, {b, c, d, e, f, g} kümesinin elemanlarından 3 tanesini seçelim.
Bu da $\binom{6}{3} = 20$ tanedir.

b) Şimdi de içinde a olan 3 elemanlı alt küme sayısını bulmak istiyoruz. Kümede a kesinlikle bulunacağına göre a dışındaki 6 eleman arasından iki tane daha seçmek lâzım ki alt küme toplam 3 elemanlı olsun. Bu da $\binom{6}{2} = 15$ olduğundan cevap 15 tir.

c) Üç elemanlı olacak. Ama ikisi belli zaten. Biri a diğeri de b. O halde bize 1 eleman daha lâzım. Bu 1 elemanı da a ve b dışındaki 5 eleman arasından seçersiniz artık. Bu da $\binom{5}{1} = 5$ olduğundan cevabımız 5 olacaktır.

Anlaşılıyor mu?

d) Şimdi de yazacağımız 3 elemanlı alt kümede a olsun ama b olmasın istiyoruz. Bu da çok basit. Bir kere olmasını istemediğimiz elemanı (b yi) atalım. Geriye kaldı 6 eleman. Şimdi bu 6 eleman arasından seçilecek 3 elemanın biri (a elemanı) zaten belli. Bu durumda bize 2 eleman daha lâzım. Ve bunu geriye kalan 5 eleman arasından seçmemiz gerekiyor.
Bu da $\binom{5}{2} = 10$ olduğundan cevabımız 10 olacaktır.

Kısacası bu tür sorularda belli sayıdaki elemanı seçerken alt kümede olması istenen alınır ve kalan elemanlar arasından eksikler seçilir. Eğer alt kümede olması istenmeyen elemanlar varsa seçim işlemi bu elemanlar atıldıktan sonra yapılır.

Kümenin eleman sayısı, eşit küme

1. A = { 1, 2, 3, {1}, {3}, {1,2}, a }
olduğuna göre, s(A) kaçtır?

2. A = { Δ, x, ⊗, {⊗, Δ}, {a}, a }
olduğuna göre, s(A) kaçtır?

3. B = { x | 1 < x < 15, x = 4k, k tam sayı}
olduğuna göre, s(B) kaçtır?

4. B = { x | − 5 < x < 10, x = 3n, n∈ Z }
olduğuna göre, s(B) kaçtır?

5. K = { x: |x − 1| = 2, x ∈ R }
olduğuna göre, s(K) kaçtır?

6. P = { x: |x − 2| ≤ 3, x ∈ Z }
olduğuna göre, s(P) kaçtır?

7. C = { "TRABZON" kelimesinin harfleri}
olduğuna göre, s(C) kaçtır?

8. A = {1, 2, 3 }
B = { x: x < 4 ve x doğal sayı }
C = { x: 1 ≤ x ≤ 3 ve x reel sayı}
D = {a, b, c }
kümeleri için aşağıda verilenlerden hangileri doğrudur?

I. A = B dir.	II. A ≡ B dir.
III. A ≡ C dir.	IV. A ≡ D dir.
V. C = D dir.	VI. B ≡ D dir.

9. A = { 0,1, 2, 3 }
B = { x: x < m ve m doğal sayı }
olmak üzere, A = B olduğuna göre, m kaçtır?

Alt Küme

10. Aşağıdaki ifadelerin değerini hesaplayınız.

a) $\binom{5}{3} =$

b) $\binom{5}{2} =$

c) $\binom{8}{3} =$

d) $\binom{7}{4} =$

e) $\binom{9}{2} - \binom{3}{0} =$

f) $\binom{4}{2} + \binom{6}{1} =$

g) $\binom{5}{0} + \binom{6}{1} + \binom{9}{8} =$

h) $\binom{8}{6} + \binom{7}{5} + \binom{5}{5} =$

11. 7 elemanlı bir kümenin 3 elemanlı alt küme sayısı kaçtır?

12. 9 elemanlı bir kümenin 2 elemanlı alt küme sayısı kaçtır?

13. A = { 1, 2, 3, 4 }
kümesinin 2 elemanlı alt küme sayısı kaçtır?

14. A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }
kümesinin 3 elemanlı alt küme sayısı kaçtır?

15. A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }
kümesinin en çok iki elemanlı alt küme sayısı kaçtır?

1. A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }
kümesinin üç elemanlı alt kümelerinin kaçında 4 bulunmaz?

2. A = { a, b, c, d, e, f, g }
kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinin kaçında a bulunur?

3. A = { a, b, c, d, e, f, g }
kümesinin 2 elemanlı alt kümelerinin kaçında a ve b bulunmaz?

4. A = { a, b, c, d, e, f, g }
kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinin kaçında a bulunur, b bulunmaz?

5. A = { a, b, c, d, e, f, g }
kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinin kaçında a ve b bulunur?

6. A = { a, b, c, d, e, f, g }
kümesinin üç elemanlı alt kümelerinin kaçında a ve b bulunur fakat c bulunmaz?

7. A = { a, b, c, d, e, f, g }
kümesinin, 3 elemanlı alt kümelerinin kaçında a ve b bulunmaz fakat c bulunur?

8. A = { a, b, c, d, e, f, g }
kümesinin, 3 elemanlı alt kümelerinin kaçında a veya b den sadece biri bulunur?

9. A = { a, b, c, d, e }
kümesinin alt kümelerinin kaçında a bulunmaz?

10. A = { a, b, c, d, e }
kümesinin alt kümelerinin kaçında a ve e bulunmaz?

11. A = { a, b, c, d, e }
kümesinin alt kümelerinin kaçında a bulunur?

12. A = { a, b, c, d, e }
kümesinin alt kümelerinin kaçında a bulunur fakat b bulunmaz?

13. A = { a, b, c, d, e }
kümesinin alt kümelerinin kaçında a ve b birlikte bulunur?

14. A = { a, b, c, d, e, f }
kümesinin alt kümelerinin kaçında a ve b bulunur fakat c bulunmaz?

15. A = { a, b, c, d, e, f }
kümesinin alt kümelerinin kaçında a veya b den sadece biri bulunur?

16. A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, }
kümesinin alt kümelerinin kaçında çift sayı bulunmaz?

1. 6 elemanlı bir kümenin, en az dört elemanlı alt küme sayısı kaçtır?

2. Bir kümenin 5 elemanlı alt küme sayısı ile 3 elemanlı alt küme sayısı eşittir.

Bu kümenin eleman sayısı kaçtır?

3. Bir kümenin 4 elemanlı alt küme sayısı ile 2 elemanlı alt küme sayısı eşit olduğuna göre, bu kümenin alt küme sayısı kaçtır?

4. Alt ve öz alt küme sayılarının toplamı 15 olan bir kümenin eleman sayısı kaçtır?

5. İki elemanlı alt kümelerinin sayısı 10 olan bir kümenin eleman sayısı kaçtır?

6. Alt ve öz alt küme sayılarının toplamı 63 olan bir kümenin 2 elemanlı alt küme sayısı kaçtır?

7. İki elemanlı alt kümelerinin sayısı 15 olan bir kümenin alt küme sayısı kaçtır?

8. En çok iki elemanlı alt kümelerinin sayısı 29 olan bir kümenin eleman sayısı kaçtır?

9. Eleman sayısı 2 artırıldığında alt küme sayısı 24 artan bir kümenin ilk durumdaki eleman sayısı kaçtır?

10. A = { a, b }
B = { a, b, c, d }

olduğuna göre, $A \subset K \subset B$ koşulunu sağlayan kaç farklı K kümesi yazılabilir?

11. K = { a, b }
M = { a, b, c, d, e, f }

olduğuna göre, $K \subseteq N \subseteq M$ koşulunu sağlayan kaç farklı N kümesi yazılabilir?

12. A = { 1, 2, 3 }
B = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 }

olduğuna göre, $A \subseteq K \subseteq B$ koşulunu sağlayan kaç farklı K kümesi yazılabilir?

13. B = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 }

kümesinin, 2 elemanlı alt kümelerinin kaçının bütün elemanları tek sayıdır?

14. K = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,8, 9 }

kümesinin, 3 elemanlı alt kümelerinin kaçının elemanlarının çarpımı tek sayıdır?

15. K = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 }

kümesinin, 3 elemanlı alt kümelerinin kaçının elemanlarının çarpımı sıfırdır?

16. N = { − 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 }

kümesinin, 3 elemanlı alt kümelerinin kaçının elemanlarının çarpımı negatiftir?

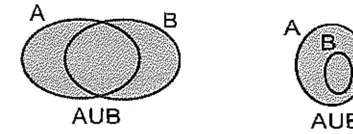
Evrensel Küme

Üzerinde işlem yapılan en geniş kümedir ve genellikle E ile gösterilir.

Kümelerde İşlemler

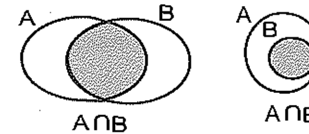
Kümelerde Bileşim ($\cup$)

A bileşim B kümesi demek, A veya B kümelerinden en az birinde bulunan elemanların oluşturduğu küme demektir. Ve $A \cup B$ ile gösterilir.
A ve B kümelerinin farklı durumlara göre bileşimleri aşağıdaki taralı bölgelerle ifade edilebilir.



Kümelerde Kesişim ($\cap$)

A kesişim B kümesi demek hem A hem de B kümesinde bulunan (ortak olan) elemanların oluşturduğu küme demektir. Ve $A \cap B$ ile gösterilir.
A ve B kümelerinin kesişimleri aşağıdaki taralı bölgelerle ifade edildiği gibi olabilir.



Örnek Soru

A = { 0, 1, 2, 3, 4 }
B = { 2, 3, 4, 5, 6, 7 }

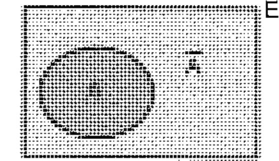
olduğuna göre, $A \cup B$ ve $A \cap B$ kümelerini yazarak eleman sayılarını bulalım.

Çözüm

$A \cup B$ kümesini yazarken önce A nın tüm elemanlarını yazın. Sonra buna B deki farklı elemanları ilave edin.
$A \cup B$ = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 } ve $s(A \cup B) = 8$ dir.
$A \cap B$ kümesi, hem A hem de B de ortak olan elemanlardan oluşuyordu. Dolayısıyla
$A \cap B$ = { 2, 3, 4 } ve $s(A \cap B) = 3$ tür.

Bir Kümenin Tümleyeni

A kümesi E evrensel kümesinin bir alt kümesi olmak üzere, A kümesinin tümleyeni demek,
A kümesini evrensel kümeye tamamlayan elemanların oluşturduğu küme demektir. Ve $\overline{A}$ veya A′ ile gösterilir.



Şekilde $s(A) + s(A') = s(E)$ olduğunu görüyor musunuz?☺

Kümelerde tümleyenle ilgili işinize yarayabilecek bir kural da **De Morgan kuralı.**
Kural kümelerin kesişim ve bileşimlerinin tümleyenleriyle ilgili ve kural şu

$(A \cup B)' = A' \cap B'$

$(A \cap B)' = A' \cup B'$

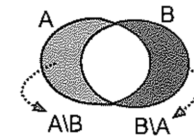
Bazı sorularda işe yarıyor. Göreceksiniz.☺

Aslında burada $\cap$ in tümleyeni $\cup$ ve $\cup$ in tümleyeni de $\cap$ diyebiliriz. Sıkıntı olmaz.☺

İki Kümenin Farkı

A fark B kümesi demek, A kümesinde olup da B de olmayan elemanların oluşturduğu küme demektir. Ve A \ B ile veya A − B ile gösterilir.

A \ B = A − B



$\mathbf{s(A \cup B) = s(A - B) + s(B - A) + s(A \cap B)}$

$\mathbf{A - B = A \cap B'}$

Örnek Soru

A = { a, b, c, d, e, f }

B = { 2, ∇, ♥, c, d, f }

olduğuna göre, A \ B ve B \ A kümelerini yazınız.

Çözüm

A \ B kümesi, A da olup da B de olmayan elemanların oluşturduğu kümeydi. A da olup B de olmayan elemanlar a, b ve e olduğundan A \ B = {a, b, e} dir. Aynı şekilde B \ A = { 2, ∇, ♥} olur.

Örnek Soru

s(A \ B) = 3

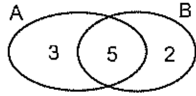
s(B \ A) = 2

s(A ∩ B) = 5

olduğuna göre, s(A∪B) kaçtır?

Çözüm

Kesişim, bileşim ve farkın eleman sayısının verildiği soruları çözerken en güzeli kümeleri çizerek çözmek. Meselâ bu soru için A ve B kümelerini çizerek çözelim.



Yaptığımız tek şey verilen eleman sayılarını yerleştirmek oldu. Artık s(A ∪ B) = 10 olduğunu görürsünüz☺

Örnek Soru

A = { x: 23 < x < 62, x = 2n ve n∈N }

B = { x: 10 < x < 50, x = 3n ve n∈N }

olduğuna göre,

a) A ve B kümelerinin eleman sayısı kaçtır?
b) A ∩ B kümesinin eleman sayısı kaçtır?
c) A \ B kümesinin eleman sayısı kaçtır?
d) B \ A kümesinin eleman sayısı kaçtır?
e) A ∪ B kümesinin eleman sayısı kaçtır?

Çözüm

a) Bu soru biraz sinir bozucu☺
Çözüm biraz uzun olabilir belki. Ama anlaşılması çok da zor değil kesinlikle.
İlk önce A ve B kümelerini liste yöntemiyle yazalım.

A = { 24, 26, 28, ... , 60}

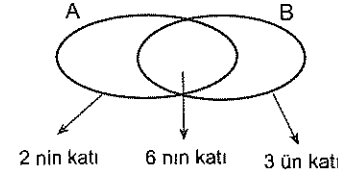
B = { 12, 15, 18, ... , 48}

$s(A) = \frac{60-24}{2} + 1 = 19$

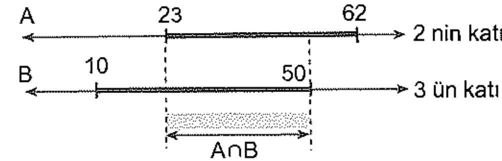
$s(B) = \frac{48-12}{3} + 1 = 13$ tür.

Nasıl mı bulduk? Ardışık sayıların terim sayısını bulurken yapıyorduk ya☺ Son terimden ilk terimi çıkarıp artış miktarına böldük ve 1 ekledik.☺

b) A ∩ B kümesi hem A hem de B de ortak olan elemanlardan oluşuyordu.



Bunu en net sayı doğrusu üzerinde gösterebilirim.



Fark ettiyseniz A ∩ B nin elemanları 23 ile 50 arasında ve hem 2 hem de 3 ün katı (yani, 6 nın katı) olan sayılardan oluşuyor. Az olduğu için yazayım☺
A ∩ B = { 24, 30, 36, 42, 48} ve s (A ∩ B) = 5 tir.

c) A \ B kümesi 23 ile 62 arasında 2 ile bölünen ama A ∩ B nin elemanı olmayan sayılardan oluşur. Bunu s(A) – s(A∩B) = 19 – 5 = 14 biçiminde hesaplayabiliriz.

d) Bu da 10 ile 50 arasında 3 e bölünen ama A ∩ B nin elemanı olmayan sayılardan oluşur. Dolayısıyla aynı mantıkla B \ A = B – (A ∩ B) olduğundan s(B \ A) = s(B) – s(A ∩ B) = 13 – 5 = 8 dir.

e) s(A∪B) = s(A) + s (B) – s(A∩B) biçiminde hesaplanabilir.
Bu da s(A∪B) = 19 + 13 – 5 = 27 olur.

Evrensel küme, bir kümenin tümleyeni

1. E evrensel kümesinin bir alt kümesi A olmak üzere,

E = { a, b, c, d, e, f, g }

A = { a, b, c, d }

olduğuna göre, A kümesinin tümleyeni olan A ' kümesi nedir?

2. E evrensel kümesinin bir alt kümesi A olmak üzere,

E = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }

A' = { 2, 4, 5, 6 }

olduğuna göre, A kümesi nedir?

3. E evrensel küme ve A kümesi bunun bir alt kümesidir.

s(E) = 12

s(A') = 8

olduğuna göre, s(A) kaçtır?

4. E evrensel küme ve A kümesi bunun bir alt kümesidir.

s(A) = 3

s(A') = 7

olduğuna göre, s(E) kaçtır?

5. E evrensel küme ve A kümesi bunun bir alt kümesidir.

s(E) = 25

s(A') = x + 7

s(A) = 2x

olduğuna göre, s(A) kaçtır?

6. E evrensel küme ve A kümesi bunun bir alt kümesidir.

s(E) = 10

s(A') = 6

olduğuna göre, A kümesinin alt küme sayısı kaçtır?

7. A ve B kümeleri E evrensel kümesinin iki alt kümesi ve

s(A) + s(B') = 15

s(B) + s(A') = 11

olduğuna göre, evrensel kümenin eleman sayısı kaçtır?

8. A, B ve C kümeleri E evrensel kümesinin iki alt kümesi ve

s(A) + s(B') = 15

s(B) + s(A') = 11

s(C ') = 9

olduğuna göre, C kümesinin eleman sayısı kaçtır?

Kümelerde bileşim, kesişim ve fark işlemi

9. $A = \{ a, b, f \}$

$B = \{ a, c, d, e \}$

olduğuna göre, $A \cup B$ kümesi nedir?

10. $A = \{ 2, 4, 6, 8 \}$

$B = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$

olduğuna göre, $A \cup B$ kümesi nedir?

11. $K = \{ a, b, d, f \}$

$M = \{ a, c, d, e, f, g \}$

olduğuna göre, $K \cap M$ kümesi nedir?

12. $A = \{ 2, 4, 6, 8 \}$

$B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 7 \}$

olduğuna göre, $B \setminus A$ kümesi nedir?

13. $A = \{ a, b, 2, 5, c, \Delta \}$

$B = \{ *, 1, 2, b, d, 7 \}$

olduğuna göre, $s(A \cup B) + s(A \cap B)$ toplamı kaçtır?

14. $A - B = \{a, b, c, 1, 5 \}$

$B = \{*, 2, e \}$

olduğuna göre, $s(A \cup B)$ kaçtır?

15. $A \cap B = \{a, b \}$

$A = \{a, b, 1, 2, *, \Delta \}$

olduğuna göre, $s(A \setminus B)$ kaçtır?

16. $A \cup B = \{a, b, c, 1, 2, 3, 5 \}$

$A \cap B = \{a, b, 1 \}$

olduğuna göre, $s[(A \setminus B) \cup (B \setminus A)]$ kaçtır?

1. $A = \{ *, 1, \theta, 2, a \}$

$B = \{ 1, 2, 3, *, \Delta, x \}$

olduğuna göre, $A \cap B$ kümesinin alt küme sayısı kaçtır?

2. $K = \{ *, \Delta\ 1, 2, a, b \}$

$M = \{ 1, 2, 3, *, c \}$

olduğuna göre, $K - M$ kümesinin 2 elemanlı alt küme sayısı kaçtır?

3. $A \cup B = \{ 1, 2, 3, 4, a, b, c \}$

$B - A = \{ 3, b, c \}$

olduğuna göre, A kümesinin 3 elemanlı alt küme sayısı kaçtır?

4. $s(A) = 5$

$s(B) = 6$

$s(A \cap B) = 3$

olduğuna göre, $s(A \cup B)$ kaçtır?

5. $s(A - B) = 2$

$s(B - A) = 3$

$s(A \cap B) = 5$

olduğuna göre, $s(A \cup B)$ kaçtır?

6. $s(A \cup B) = 12$

$s(B - A) = 3$

olduğuna göre, $s(A)$ kaçtır?

7. $s(A \cup B) = 14$

$s(A) = 9$

$s(B) = 8$

olduğuna göre, $s(A \cap B)$ kaçtır?

8. $s(A \cup B) = 8$

$s(B - A) = 3$

$s(A - B) = 4$

olduğuna göre, $s(A \cap B)$ kaçtır?

9. A ve B kümeleri için,

$s(A \cap B) = n - 1$
$s(A - B) = 2$
$s(B - A) = 5$
$s(A \cup B) = 18$

olduğuna göre, n kaçtır?

10. $s(A - B) = 10$
$s(A \cup B) = 43$

olduğuna göre, B kümesinin eleman sayısı kaçtır?

11. **A ve B aynı evrensel kümenin alt kümeleridir.**

$s(A \cap B') = 5$
$s(B \cap A') = 4$
$s(A \cap B) = 2$

olduğuna göre, A ∪ B kümesinin eleman sayısı kaçtır?

12. **A ve B aynı evrensel kümenin alt kümeleridir.**

$s(A) = 7$
$2s(A) = 3s(B) - 1$
$s(A \cap B) = s(A) - s(B)$

olduğuna göre, s(A ∪ B) kaçtır?

13. $s(A \cap B') = 5$
$s(B \cap A') = 6$
$s(A' \cup B')' = 2$

olduğuna göre, s(A ∪ B) kaçtır?

14. **A ve B aynı evrensel kümenin alt kümeleridir.**

$s(B - A) > 8$
$s(A \cup B) = 37$
$s(A \cap B) = 15$

olduğuna göre, s(A – B) <u>en çok</u> kaçtır?

15. **A ve B aynı evrensel kümenin iki alt kümesi olmak üzere,**

$s(A \cup B) + s(A \cap B) = 20$
$s(A) - s(B) = 8$

olduğuna göre, A kümesinin eleman sayısı kaçtır?

16. **A ve B kümeleri E evrensel kümesinin alt kümeleridir.**

$s(E) = 19$
$s(A' \cap B') = 3$
$s(A \cap B') = 7$

olduğuna göre, B kümesinin eleman sayısı kaçtır?

1. A ∪ B, A – B ve B – A kümelerinin alt küme sayıları sırasıyla 64, 8 ve 2 dir.

Buna göre, A ∩ B kümesinin eleman sayısı kaçtır?

2. A ∩ B, A ∪ B ve B – A kümelerinin alt küme sayıları sırasıyla 2, 32 ve 4 tür.

Buna göre, A – B kümesinin alt küme sayısı kaçtır?

3. A ∪ B, A – B ve A ∩ B kümelerinin alt küme sayıları sırasıyla 128, 8 ve 2 dir..

Buna göre, B – A kümesinin 2 elemanlı alt küme sayısı kaçtır?

4. A, B ve A ∩ B kümelerinin alt küme sayıları sırasıyla 32, 16 ve 8 dir.

Buna göre, A ∪ B kümesinin 3 elemanlı alt küme sayısı kaçtır?

5. **A, B ve A ∪ B kümelerinin alt küme sayıları sırasıyla 16, 32 ve 128 olduğuna göre, A∩B kümesinin eleman sayısı kaçtır?**

6. $A \subset B$ olmak üzere,

$s(B - A) = 4$
$s(A \cup B) = 7$

olduğuna göre s(A) kaçtır?

7. $A \subset B$ olmak üzere,

$s(B) = 6$
$s(A \cap B) = 2$

olduğuna göre, s(B – A) kaçtır?

8. $A \subset B \subset C$ olmak üzere,

$s(A \cup B \cup C) = 9$
$s(B - A) = 3$
$s(C - B) = 2$

olduğuna göre, s(A) kaçtır?

9. $A \subset B \subset C$ olmak üzere,

$s(A \cap B \cap C) = 1$

$s(B - A) = 5$

$s(C - B) = 4$

olduğuna göre, $s(A \cup B \cup C)$ kaçtır?

10. $A \subset B \subset C$ olmak üzere,

$s(A) = 7$

$s(C) = 15$

olduğuna göre, $s(B - A) + s(C - B)$ **kaçtır?**

11. $A \not\subset B$ olmak üzere,

$s(A \cap B) = 2$

$s(A \cup B) = 9$

olduğuna göre, s(B) en çok kaçtır?

12. $A \not\subset B$, $B \not\subset A$ olmak üzere,

$s(A \cap B) = 6$

olduğuna göre, $s(A \cup B)$ en az kaçtır?

13. $A \not\subset B$ ve $B \not\subset A$ olmak üzere,

$s(A) + s(B) = 25$

olduğuna göre, $A \cup B$ kümesinin eleman sayısı en az kaçtır?

14. $A \not\subset B$, $B \not\subset A$, $s(A) \neq s(B)$ olmak üzere,

$s(A \cap B) = 4$

olduğuna göre, $s(A \cup B)$ en az kaçtır?

15. Boş olmayan A ve B kümeleri için

$2s(A \cup B) = 4s(A - B) = 5s(A \cap B)$

olduğuna göre, B – A kümesinin eleman sayısı en az kaçtır?

16. $A \not\subset B$ olmak üzere,

$s(B - A) = 3$

$s(A \cup B) = 9$

olduğuna göre, $s(A \cap B)$ en çok kaçtır?

1. $A \cap B \neq \varnothing$ olmak üzere,

$s(A - B) = 7$

$s(A \cup B) = 21$

olduğuna göre, B \ A kümesinin eleman sayısı en çok kaçtır?

2. A ve B iki küme olmak üzere,

$\frac{s(A)}{s(A \cap B)} = \frac{7}{3}$, $\frac{s(B - A)}{s(B)} = \frac{3}{5}$

olduğuna göre, $s(A \cup B)$ en az kaçtır?

3. E evrensel küme olmak üzere,

$s(E) = 32$

$s(B - A) = 5$

$s(A - B)' = 20$

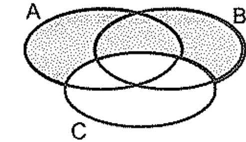
$s(B') = 19$

olduğuna göre, $A \cup B$ kümesinin eleman sayısı kaçtır?

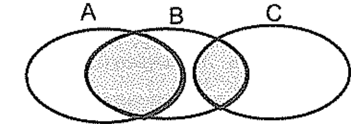
4. $s((A \cup B) - (A \cap B)) = 6$

olduğuna göre, $s(A - B) + s(B - A)$ toplamı kaçtır?

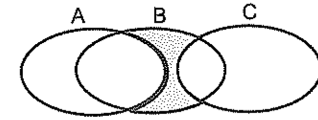
5. Aşağıda verilen A, B ve C kümelerine göre taralı bölgeyi ifade eden kümeyi yazınız.



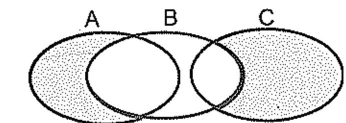
6. Aşağıda verilen A, B ve C kümelerine göre taralı bölgeyi ifade eden kümeyi yazınız.



7. Aşağıda verilen A, B ve C kümelerine göre taralı bölgeyi ifade eden kümeyi yazınız.



8. Aşağıda verilen A, B ve C kümelerine göre taralı bölgeyi ifade eden kümeyi yazınız.



Aşağıdaki ilk 5 soruyu A kümesine göre cevaplayınız.

A = { x: 30 ≤ x ≤ 170, x doğal sayı }

9. **A kümesinin kaç elemanı 2 ile tam bölünür?**

10. **A kümesinin kaç elemanı 3 ile tam bölünür?**

11. **A kümesinin kaç elemanı 2 ve 3 ile tam bölünür?**

12. **A kümesinin kaç elemanı 2 ile tam bölündüğü halde 3 ile tam bölünmez?**

13. **A kümesinin kaç elemanı 2 veya 3 ile tam bölünür?**

14. A = { x: x ≤ 120, x = 5k ve k doğal sayı }

B = { x: x ≤ 100, x = 4k ve k doğal sayı }

olduğuna göre, A ∩ B kümesinin eleman sayısı kaçtır?

15. A = { x: x < 50, x = 3k ve k∈ Z^+ }

B = { x: x < 61, x = 2k ve k∈Z^+ }

olduğuna göre, A – B kümesinin eleman sayısı kaçtır?

1. A = { x: x ≤ 100, x = 4n ve n doğal sayı }

B = { x: x < 130, x = 6n ve n doğal sayı }

olduğuna göre, A ∪ B kümesinin eleman sayısı kaçtır?

2. A = { x: 19 < x < 142, x = 4n ve n∈N }

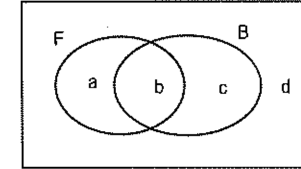
B = { x: 45 < x < 180, x = 6n ve n∈N }

olduğuna göre, A ∪ B kümesinin eleman sayısı kaçtır?

Küme Problemleri

Küme problemlerini çözerken en önemli husus, problemde ifade edilen verilere uygun kümeyi çizebilmektir.

Örneğin, diyelim ki bir grupta futbol(F) ve basketbol(B) oynayanlar ile bunlardan herhangi birini oynamayanlar var. Bu duruma ait şema şöyle çizilmeli.



Bu şemada, hiç birini oynamayanlar: d,

İkisini de oynayanlar: b,

Sadece birini oynayanlar: a + c

En çok birini oynayanlar: a + c + d

En az birini oynayanlar: a + b + c olduğunu bilmeniz lâzım.

Burada şuna dikkat edin, en çok birini oynayanlar denildiğinde buna hiç oynamayanları da dâhil ediyoruz.

Küme problemlerinde şemayı doğru çizebilirseniz çözümleri çok kolay.

Küme problemlerinde veya kelimesi ∪ yerine ve kelimesi de ∩ yerine kullanılır.

Örneğin, **A veya B** demek A ∪ B demektir.

Aynı şekilde **A ve B** de A ∩ B demektir.

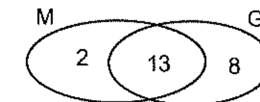
Örnek Soru

Bir sınıftaki öğrencilerden 15 i matematik dersinden 21 i geometriden, 13 ü ise her ikisinden de başarılıdır.

İki dersten de başarısız olan öğrenci olmadığına göre sınıf mevcudu kaçtır?

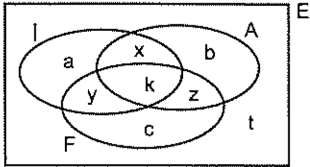
Çözüm

En klasik şekilde kümeyi aşağıdaki gibi çizerek ilk önce kesişimi sonra da A\B ve B\A nın eleman sayısını yazın.



Bu durum da sınıf mevcudu 23 oluyor.

Eğer problemi çözerken üç farklı küme çizmek gerekirse,
Örneğin,
Almanca, İngilizce ve Fransızca dillerini bilenlerle bu dillerden hiç birini bilmeyen kişilerin bulunduğu bir topluluk için en genelinden şöyle bir Venn şeması çizmek lazım.



Bu şemada,

Her üç dili de bilenlerin sayısı	: k
Hiç birini bilmeyenlerin sayısı	: t
Sadece bir dil bilenlerin sayısı	: a + b + c
Sadece iki dil bilenlerin sayısı	: x + y + z
En az iki dil bilenlerin sayısı	: x + y + z + k
En çok bir dil bilenlerin sayısı	: a + b + c + t

Almanca ve Fransızca bilip İngilizce bilmeyenlerin sayısı ise z dir.

3. Futbol veya basketbol sporlarından en az birini yapanların bulunduğu bir grupta sadece futbol oynayanların sayısı12, basketbol oynayanların sayısı 10 dur.

Bu toplulukta kaç kişi vardır?

4. **İngilizce ve Fransızca dillerinden en az birini bilenlerin olduğu bir grupta, İngilizce bilenlerin sayısı 13, Fransızca bilenlerin sayısı 10 ve her iki dili de bilenlerin sayısı 5 olduğuna göre grupta kaç kişi vardır?**

5. Bir sınıfta Fransızca veya Almanca dillerinden en az birini bilen 28 öğrenci vardır. Almanca bilenlerin sayısı; Fansızca bilenlerin sayısının 3 katı ve her iki dili bilenlerin sayısının 6 katıdır.

Bu sınıfta sadece Almanca bilenlerin sayısı kaçtır?

6. Bir toplulukta müzik aleti olarak piyano veya kemandan en az birini çalabilen 20 kişi vardır.

Sadece piyano çalabilenlerin sayısı sadece keman çalabilenlerin sayısının 5 katı ve her ikisini de çalabilenlerin sayısı 2 olduğuna göre, keman çalabilenlerin sayısı kaçtır?

1. 32 kişilik bir sınıfta matematik dersinden geçenlerin sayısı 18, Türkçe dersinden geçenlerin sayısı 22 ve her iki dersten de geçenlerin sayısı 15 tir.

Buna göre, iki dersten de kalanların sayısı kaçtır?

2. Bir sınıfta matematik dersinden kalanların 4 ü Fizik dersinden de kalmıştır. Matematikten kalanların sayısı 10, fizikten kalanların sayısı 13 tür.

Sınıf mevcudu 34 olduğuna göre, hem matematik hem de fizikten geçen öğrenci sayısı kaçtır?

3. 30 kişilik bir sınıfta Matematik dersinden başarılı olan erkek öğrenci sayısı 8 ve başarısız olan kız öğrenci sayısı 7 dir.

Bu sınıfta matematik dersinden başarılı olan öğrenci sayısı 19 olduğuna göre, başarısız erkek öğrenci sayısı kaçtır?

4. Herkesin futbol veya basketbol sporlarından en az birini yaptığı 21 kişilik bir sporcu grubunda basketbol oynayanların sayısı futbol oynayanların sayısının 4 katıdır.

Buna göre, her iki sporu da yapanların sayısı kaçtır?

5. A, B ve C gazetelerinden en az birini okuyanların bulunduğu bir toplulukta en az iki gazete okuyanların sayısı 25, en çok iki gazete okuyanların sayısı 20, en çok bir gazete okuyanların sayısı 6 dır.

Bu toplulukta A, B ve C gazetelerinin üçünü de okuyanların sayısı kaçtır?

6. 120 kişilik bir öğrenci grubunun %70 Matematikten, % 60 ı Kimyadan başarılıdır.

Bu gruptaki öğrencilerin % 10 u her iki dersten de başarısız olduğuna göre, hem matematik hem de kimyadan başarılı olanların sayısı kaçtır?

7. 32 kişilik bir sınıfta matematikten başarılı olan bütün öğrenciler Türkçe den de başarılıdır. Matematikten başarılı olanların sayısı Türkçe den başarılı olanların sayısının %40 ı dır.

7 öğrenci bu iki dersin ikisinden de başarısız olduğuna göre sadece Türkçe den başarılı olan öğrenci sayısı kaçtır?

8. A, B ve C gazetelerinden sadece birini okuyanların bulunduğu 250 kişilik bir toplulukta A gazetesini okumayanlar 180 kişi, B gazetesini okumayanlar 190 kişidir,

Buna göre C gazetesini okuyanların sayısı kaçtır?

9. Matematik dersinden başarılı olan öğrencilerin Türkçe dersinden de başarılı olduğu bir sınıfta matematikten başarılı olanların sayısı 10, her iki dersten de başarısız olanların sayısı 4 tür.

Sınıf mevcudu 24 olduğuna göre, sadece Türkçeden başarılı olanların sayısı kaçtır?

10. Futbol, voleybol ve basketbol sporlarından en az birini yapanların bulunduğu bir toplulukta futbol oynayanlar 19, voleybol oynayanlar 16, basketbol oynayanlar 18, futbol ve basketbol oynayanlar 9, basketbol ve voleybol oynayanlar 7, futbol ve voleybol oynayanlar 10 her üçünü de oynayanlar 2 kişidir.

Buna göre, topluluktaki kişi sayısı kaçtır?

11. Matematik, Coğrafya ve Tarih derslerinin en az birinden başarılı olan 40 kişilik bir sınıfta Tarihten başarısız olan öğrenci yoktur.

En az iki dersten başarılı olan öğrenci sayısı 32 ve sadece iki dersten başarılı olan öğrenci sayısı 28 olduğuna göre, üç dersten de başarılı olan öğrenci sayısı kaçtır?

12. Matematik, Türkçe ve Kimya derslerinin en az birinden başarılı olan 32 kişilik bir sınıfta Türkçeden başarısız olan öğrenci yoktur.

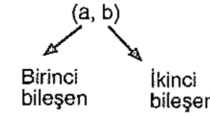
En az iki dersten başarılı olan öğrenci sayısı 25 ve sadece iki dersten başarılı olan öğrenci sayısı 21 olduğuna göre, üç dersten de başarılı olan öğrenci sayısı kaçtır?

Kartezyen çarpım
Bagıntı
Fonksiyon

"Yetenekler ortaktır; herkes onlara sahiptir ama nadir olan yeteneklerimizin bizi götürdüğü yere gitme cesaretidir."

Sıralı İkili

a ve b gibi iki elemanın sıra gözetilerek (a, b) biçimindeki ifadesine **sıralı ikili** ya da kısaca **ikili** denir.



Sıralı ikililerde sıra acayip derecede önemli olduğundan bileşenlerin yerlerini öyle kafanıza göre değiştiremezsiniz. Ona göre☺

a ≠ b ise (a,b) ≠ (b,a) dır.

Eğer iki sıralı ikili eşit ise birinci bileşenleri eşit ve ikinci bileşenleri de eşit olmalıdır.

Yani, (a, b) = (c, d) ise a = c ve b = d dir.

Zaten başka da bir şey yok sıralı ikililerle ilgili.

KARTEZYEN ÇARPIM

Birinci bileşeni A kümesinden, ikinci bileşeni B kümesinden alınarak elde edilen bütün sıralı ikililerin kümesine **A ile B nin kartezyen çarpımı** denir ve A×B ile gösterilir.

Anlayacağınız **kartezyen çarpım, elemanları sıralı ikililer olan bir kümedir.**

Bu çok önemli. Ona göre...

Örnek Soru,

A = {1, 2, 3} B = {a, b}

olduğuna göre, A × B ve B × A kümelerini yazınız.

Çözüm

A × B kümesini yazarken birinci bileşeni A, ikinciyi B kümesinden alıyoruz.

A × B = {(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)}

B × A da ise birinci bileşeni B, ikinci bileşeni A kümesinden alarak yazabileceğimiz tüm ikilileri yazıyoruz.

B × A = {(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3)}

Burada s(A × B) = s(A).s(B) olduğunu görün.

Örneğin, s(A) = 4 ve s(B) = 6 ise s(A × B) = 24 tür.

Şimdi kalkıp size bir de A × B kümesinin kaç tane alt kümesi vardır dermişim... ☺

Ya da 2 elemanlı kaç alt kümesi vardır?

Problem olur mu?

Bulabilirsiniz değil mi?

Neyse...

Birazdan buna **bağıntı** diyeceğiz.

Ama sabredin hele... ☺ Acele etmeyin bakalım☺

Kartezyen Çarpım Grafiği

Kartezyen çarpımın grafiği noktalar, çizgiler veya dikdörtgensel alandan oluşur. Basit bir iki hareket sadece.☺

Çok kolay bir örnek soruyla göstereyim.

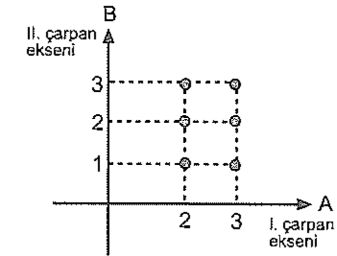
Örnek Soru,

A = { 2, 3 }

B = { 1, 2, 3 }

kümeleri için A × B nin grafiğini çiziniz.

Çözüm



Grafikte yatay eksen birinci çarpan ekseni, dikey olan da ikinci çarpan eksenidir. x = 2 ve x = 3 ten çizilen dikey çizgilerle y = 1, y = 2 ve y = 3 ten çizilen yatay çizgilerin kesiştiği noktalar A × B nin grafiğidir.

Daha söyleyeceğim birkaç şey daha var. Ama onları da anlatırsam konu çok uzayacak. Onun için☹

Kartezyen Çarpımın Özellikleri

Sadece şunları bilin yeter.☺

1. (A × B) ∪ (A × C) = A × (B ∪ C)
   (B × A) ∪ (C × A) = (B ∪ C) × A
2. (A × B) ∩ (A × C) = A × (B ∩ C)
   (B × A) ∩ (C × A) = (B ∩ C) × A

Kartezyen çarpımın bileşim ve kesişim üzerine dağılma özelliği vardır.

Örnek Soru

s(A ∩ B) = 5

s(C) = 2

olduğuna göre, s((C × A) ∩ (C × B)) kaçtır?

Çözelim☺
İstenen ifadeye dikkatli bakarsanız şunu göreceksiniz. Kartezyen çarpımın kesişim üzerine dağılma özelliği kullanılmış.
$(C \times A) \cap (C \times B) = C \times (A \cap B)$ olduğundan
$s((C \times A) \cap (C \times B)) = s(C \times (A \cap B))$
$= s(C) . s(A \cap B) = 2.5 = 10$ dur.
Daha fazla detaya gerek yok. Anlattıklarımı iyi öğrenin yeter.

BAĞINTI

A × B nin her bir alt kümesine A dan B ye tanımlı bir **bağıntı** denir. Anlayacağınız **bağıntı denen şey bir alt küme aslında**. Kartezyen çarpım kümesinin alt kümesi... Ama o kadar da basit değil.☺

Örneğin, A = {1, 2, 3} ve B = {a, b} kümeleri için
A dan B ye tanımlı bir bağıntı yazmak için ilk önce
A × B kümesini yazmak lâzım.
A × B = {(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)}
İşte bu kümenin her bir alt kümesine A dan B ye tanımlı bir bağıntı diyoruz.
β = {(1,a), (1,b), (3,b)}
α ={(2,b)}
θ = { }
Bağıntıları A dan B ye tanımlı birer bağıntıdır.

Bağıntı Sayısı Nasıl Bulunur?
Bağıntı dediğimiz şey bir alt küme olduğundan alt küme sayısının nasıl bulunduğunu bilen herkes bağıntı sayısını da bulabilir. Bu kadar basit işte☺

A dan B ye tanımlı bağıntı sayısı A × B nin alt kümelerinin sayısı kadardır. Bu da $2^{s(A\times B)}$ tanedir.

Bağıntının Tersi
Örneğin, β = { (1,3), (2,4), (2,5)} bağıntısının tersi
β^{-1} = {(3,1), (4,2), (5,2)} dir.
Ne yaptığımı anlamışsınızdır.☺
Evet. Bir bağıntının tersi bulunurken bu bağıntıyı oluşturan sıralı ikililerin birinci ve ikinci bileşenlerinin yerlerini değiştiriyoruz. Bu kadarcık işte...

Ama meraklıları için şunu da söyleyeyim.

$\beta = \{(x,y): 3x+2y=10,\ x,y \in R\}$ bağıntısının tersi ise $\beta^{-1} = \{(x,y): 3y+2x=10,\ x,y \in R\}$ dir.
Yani, y ve x yer değiştiriyor fark ettiyseniz☺

Bağıntının Özellikleri
A kümesinde tanımlı bir β bağıntısı ele alarak bağıntının özelliklerini vereyim.

Yansıma Özelliği
Her x ∈ A için (x, x) ∈ β bağıntısının yansıma özelliği vardır. (Yani yansıyan bir bağıntıdır.) bağıntıda (1,1), (2,2), ... gibi elemanların hepsi olmalı ki yansıma özelliği olsun.

Simetri Özelliği
Her ∀ (x,y) ∈ β için (y,x) ∈ β ise bağıntının **simetri özelliği** vardır. (Yani bağıntı simetriktir.) Bir bağıntının simetrik bağıntı olması için her ikilinin simetriği muhakkak olmalı.
Birinin bile simetriği olmazsa bu bağıntı simetrik olmaz.

Ters Simetri Özelliği
Bağıntıda hiçbir ikilinin simetriği olmamalı ki bu bağıntı ters simetrik olsun. Bir tanesinin bile simetriği varsa bağıntı ters simetrik olmaz.

Geçişme Özelliği
Bu acayip bir özellik! Ve gerçekten çok sinir ve gıcık. Ne yalan söyleyeyim...☺
Her $[(x,y) \in \beta$ ve $(y,z) \in \beta]$ iken $(x,z) \in \beta$ ise
ya da $(x,y) \in \beta$ iken β nın y ile başlayan elemanı yoksa bağıntısının **geçişme özelliği** vardır. (ya da geçişkendir.)

Örneğin, A = {1, 2, 3} kümesinde tanımlı
$\beta = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,2), (3,3)\}$
Bağıntısının özelliklerini inceleyelim.
β bağıntısı yansıyandır. Çünkü (1,1) , (2,2) ve (3,3) ikililerinin tamamı β nın elemanıdır.
β bağıntısı simetrik değildir. Çünkü (3,2) nin simetriği yok. (simetrik olması için her elemanın simetriği olmalıydı.)
Ters simetrik de değildir. Çünkü (1,2) nin simetriği olan (2,1) de bağıntının elemanı. (Bir elemanın bile simetriği olursa ters simetrik olmaz.)
Geçişme özelliği yoktur. Çünkü (3,2) ve (2,1) ∈ β iken (3,1) ∉ β dır.
Çok da uzatmaya gerek yok. Geçtim☺

Sıralı İkili

1. (x, y) = (5, 2)
olduğuna göre, x + y toplamı kaçtır?

2. (x + 2, y – 1) = (4, 2)
olduğuna göre, x + y toplamı kaçtır?

3. $(\sqrt{x-2}, \sqrt[3]{y}) = (2, 2)$
olduğuna göre, x + y toplamı kaçtır?

4. $(a+b,\ ab) = (6, 8)$
olduğuna göre, $a^2 + b^2$ **toplamı kaçtır?**

5. (2x + y, x + 2y) = (5, 7)
olduğuna göre, x + y toplamı kaçtır?

6. $(2^{a-1}, 9) = (8, 3^{b-2})$
olduğuna göre, a.b çarpımı kaçtır?

Kartezyen Çarpım

7. A = { 2, 3, 4 }
B = { 1, 5 }
olduğuna göre, A × B kümesini liste yöntemiyle yazınız.

8. A × B = {(2,3), (2,5), (3,3), (3,5), (4,3), (4,5)}
olduğuna göre, A kümesi nedir?

9. $A = \{ a, b, c, d, e \}$
$B = \{ 1, 2, 3 \}$
olduğuna göre, s(A × B) kaçtır?

10. $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$
$s(A \times B) = 24$
olduğuna göre, s(B) kaçtır?

11. $s(A) = x + 1$
$s(B) = x$
$s(A \times B) = 20$
olduğuna göre, x kaçtır?

12. $A = \{ a, b \}$
$B = \{ 1, 2, 3, 4 \}$
$C = \{ x, y, z \}$
olduğuna göre, s(A × B × C) kaçtır?

13. $A = \{ 1, 2, 3 \}$
$B = \{ 2, 3 \}$
olduğuna göre, A × B nin grafiğini çiziniz.

14. $A = \{1, 2, 3 \}$
$B = [1, 4]$
olduğuna göre, A × B nin grafiğini çiziniz.

15. $A = \{ 2, 3, 4 \}$
$B = [-1, 3)$
olduğuna göre, A × B nin grafiğini çizelim.

16. $A = [2, 4)$
$B = (-1, 2]$
olduğuna göre, B × A nın grafiğini çiziniz.

1. $A = (2, 3)$
$B = \{ -1, 1, 2, 3 \}$
olduğuna göre, A × B nin grafiğini çiziniz.

2. $A = \{ x: 1 \leq x \leq 3, x \in R \}$
$B = \{ x: 2 \leq x \leq 5, x \in R \}$
olduğuna göre, A × B nin sınırladığı alan kaç birim karedir?

3. $A = [2, 6]$
$B = [-2, 3]$
olduğuna göre, A × B nin elemanlarının sınırladığı alan kaç birim karedir?

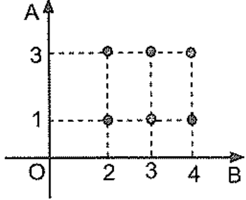
4. $A = \{ x: 3 \leq x \leq 5, x \in R \}$
$B = \{ x: 2 \leq x \leq 4, x \in Z \}$
olduğuna göre, A × B nin grafiğini oluşturan doğru parçalarının uzunlukları toplamı kaç birimdir?

5. $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$
$B = \{ 1, 2, 5 \}$
olduğuna göre, A × B nin elemanlarını dışarıda bırakmayan en küçük çemberin yarıçapı kaç birimdir?

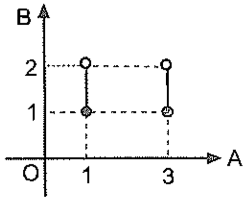
6. $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$
olduğuna göre, A × A nın elemanlarını dışarıda bırakmayan en küçük çemberin çapı kaç birimdir?

Aşağıda verilen A × B kümesi grafiklerine göre, A ve B kümelerini yazınız.

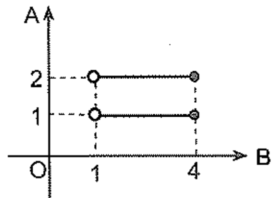
7.



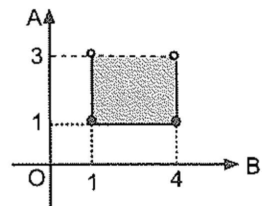
8.



9.



10.



11. s(A∪B) = 10

s(A) = 3

olduğuna göre, s((A × A) ∪ (A × B)) kaçtır?

12. s(A ∩ B) = 3

s(C) = 4

olduğuna göre, s((C × A) ∩ (C × B)) kaçtır?

13. A = {1, 2, 3, 4, 5}

B = {a, b, c }

C = { 2, 3, 4, 6, 8 }

olduğuna göre, s((A × B) ∩ (C × B)) kaçtır?

14. A, B ve C kümeleri için

A × B = {(2,3), (2,5), (3,3), (3,5), (4,3), (4,5)}

C = {a, b, c, d}

olduğuna göre, s((A × B × C) kaçtır?

Bağıntı

1. β = {(x,y) : x + y = 3 ve x, y doğal sayı }

bağıntısının eleman sayısı kaçtır?

2. β = {(x,y) : x + 3y = 14 ve x, y doğal sayı }

olduğuna göre, s(β) kaçtır?

3. β = {(x,y) : x.y = 35 ve x, y doğal sayı }

bağıntısının eleman sayısı kaçtır?

4. R de tanımlı β bağıntısı için

$$\beta(x,y) = \frac{3x - y}{2x}$$

olduğuna göre, β(4, 8) in değeri kaçtır?

5. R de tanımlı β bağıntısı için

$$\beta(a,b) = \frac{2a + 4b}{b}$$

olduğuna göre, β(4, 8) = β (6, k) eşitliğini sağlayan k değeri kaçtır?

6. A = { 1, 2, 3 }

olduğuna göre, A kümesinde tanımlı bağıntı sayısı kaçtır?

7. A = { 1, 2, 3 }

olduğuna göre, A da tanımlı 2 elemanlı bağıntı sayısı kaçtır?

8. A = {a, b, c}

olduğuna göre A da tanımlı bağıntıların kaçında (a, c) elemanı bulunmaz?

9. A = {a, b, c }
olduğuna göre, A da tanımlı bağıntıların kaçında (a, b) bulunur, (b,a) bulunmaz?

10. A = {1, 2, 3 } olmak üzere,
A kümesinde β = { (1,1), (2,2), (3,3), ... } koşuluna uygun kaç farklı β bağıntısı tanımlanabilir?

Aşağıdaki soruları A = { a, b } ve B = {1, 2, 3 } kümelerine göre cevaplayınız.

11. A dan B ye tanımlı bağıntı sayısı kaçtır?

12. A dan B ye tanımlı bağıntıların kaçında (a, 1) elemanı bulunmaz?

13. A dan B ye tanımlı 3 elemanlı bağıntı sayısı kaçtır?

14. A dan B ye tanımlı 3 elemanlı bağıntıların kaçında (b, 3) elemanı bulunmaz?

15. A dan B ye tanımlı 3 elemanlı bağıntıların kaçında (a, 2) elemanı bulunur?

16. A dan B ye tanımlı 3 elemanlı bağıntıların kaçında (a, 1) elemanı bulunur, fakat (b, 1) elemanı bulunmaz?

1. $A = \{ x : x^2 < 4, x \in Z^+ \}$

$B = \{ x : 2x - 3 < 1, \text{x doğal sayı} \}$

olduğuna göre, A dan B ye tanımlanabilecek bağıntı sayısı kaçtır?

2. $\beta = \{ (x,y) : |x| \leq 3, \ |y-1| \leq 1, \text{x ve y reel sayı} \}$

bağıntısının elemanı olan (x,y) ikililerinin sınırladığı alan kaç birim karedir?

3. $\beta = \{(x,y) : 5x - 3y = 13 \text{ ve x, y reel sayı} \}$
olmak üzere, (a, 4)∈ β olduğuna göre, a kaçtır?

4. $\beta = \{(x,y) : xy + x + y = 19 \text{ ve } x, y \in R\}$
olmak üzere, (m, 2)∈ β^{-1} olduğuna göre, m kaçtır?

5. $\beta_1 = \{(x,y) : x - y = 2, \ x,y \in R \}$

$\beta_2 = \{(x,y) : x + y = 6, \ x,y \in R \}$

olduğuna göre, $\beta_1 \cap \beta_2$ nedir?

6. Reel sayılarda tanımlı

$\beta_1 = \{(x,y) : x^2 + y = 5 \text{ ve } x,y \in R\}$

$\beta_2 = \{(x,y) : 3x - y = 5 \text{ ve } x,y \in R \}$

olduğuna göre, $\beta_1 \cap \beta_2$ nedir?

7. $\beta_1 = \{(x,y) : x + 3y = 8, \ x,y \in R \}$

$\beta_2 = \{(x,y) : 2x - y = -3, \ x,y \in R \}$

olduğuna göre, $\beta_1 \cap \beta_2^{-1}$ nedir?

8. A = {1, 2, 3} kümesinde tanımlı aşağıdaki bağıntılardan hangileri yansıyandır?

β = { (1,1),(2,3)}
α = { (1,1), (2, 2), (2, 3) ,(3,3)}
θ = { (1,1), (1, 2), (2, 1) ,(2, 2), (3,1), (3, 3)}

9. A = {1, 2, 3} kümesinde tanımlı aşağıdaki bağıntılardan hangileri simetriktir?

$\beta = \{(1,1),(2,2)\}$
$\alpha = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,3), (3,3)\}$
$\theta = \{(1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1), (3,3)\}$

10. A = {1, 2, 3} kümesinde tanımlı aşağıdaki bağıntılardan hangileri ters simetriktir?

$\beta = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$
$\alpha = \{(1,3), (2,1), (2,3), (3,2)\}$
$\theta = \{(1,1), (1,2), (2,2), (3,1), (3,2)\}$

11. $A = \{a, b, c, d, e\}$

kümesinde tanımlı, yansıma özelliği olan β bağıntısı en az kaç elemanlıdır?

12. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

kümesinde tanımlı, yansıma özelliği olan β bağıntısının simetri ve ters simetri özellikleri olmadığına göre, s(β) en az kaçtır?

13. Gerçek sayılar kümesinde tanımlı

$\beta = \{(x,y) : (a-2)x - 3y = 0 \text{ ve } x, y \in R\}$

bağıntısı yansıyan olduğuna göre, a kaçtır?

14. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ olmak üzere,

$\beta = \{(x, y): 3 \mid (x-y),\ x \in A \text{ ve } y \in A\}$

olduğuna göre, 2 nin denklik sınıfı nedir?

15. $\beta = \left\{(x,y) : x^2 + x = y^2 + y \text{ ve } (x,y) \in R^2\right\}$

bağıntısı denklik bağıntısı olduğuna göre, 3 ün denklik sınıfı nedir?

16. $\beta = \left\{(x,y) : x^2 - y^2 = 2(y-x) \text{ ve } (x,y) \in R^2\right\}$

bağıntısı denklik bağıntısı olduğuna göre, 2 nin denklik sınıfı nedir?

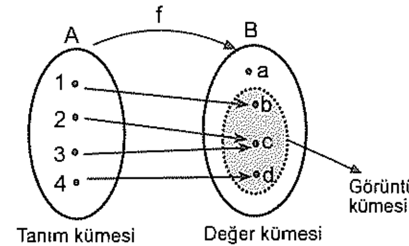
FONKSİYONLAR

Anlattığım tüm konular önemliydi. Ama bu daha da önemli. Çünkü fonksiyonlarda probleminiz olursa büyük bir olasılıkla bundan sonraki türev ve integral başta olmak üzere pek çok konuda problem yaşamanız kaçınılmaz.
Bu bir kehanet filan değil... Ona göre...
Bence kararlı bir şekilde konuya başlayın ve mırın kırın etmeden adam gibi çalışın ve bitirin bu işi. Pişman olmayacağınızdan emin olabilirsiniz.

Fonksiyon nedir?

A kümesinin her bir elemanını B kümesindeki yalnızca bir elemanla eşleyen A dan B ye her bağıntıya **fonksiyon** denir ve

$f: A \rightarrow B$ biçiminde gösterilir.



Burada, A kümesi fonksiyonun **tanım kümesi**, B kümesi de fonksiyonun **değer kümesidir.**

Tanım kümesi = A = {1, 2, 3, 4}
Değer kümesi = B = {a, b, c, d}
Verilen f fonksiyonunda $f: 1 \rightarrow b$ dir. Ve bu f(1) = b biçiminde ifade edilir. Bu **"1 in f fonksiyonu altındaki görüntüsünün b olduğu"** anlamına gelir.

Aynı şekilde f(2) = c, f(3) = c ve f(4) = d dir. Bu fonksiyon f = {(1,b), (2,c), (3,c), (4,d)} biçiminde ifade edilebilir. Dikkat ettiyseniz fonksiyonun görüntü kümesi f(A) = {b, c, d} dir.

Fonksiyonda görüntü(değer) bulma olayı

Bir fonksiyonda x e (değişkene) uygun koşullarda her değer verilebilir. Yeter ki x gördüğünüz her yere aynı değeri yazmayı unutmayın.
(Ama x gördüğünüz her yere aynı değeri yazmazsanız yamulma olasılığınız yüksek☺)

Bakın Canlar! Bu söylediğim şeyler acayip derecede önemli.
Ne demek istediğimi daha iyi anlamak için inceleyin bakalım şu çözümlü örnekleri.

Örnek Soru

$f(x) = 3x + 2$

olduğuna göre, aşağıdaki ifadelerin değerini bulalım.

a) f(4) değeri kaçtır?

b) $f\left(\frac{5}{3}\right)$ **değeri kaçtır?**

c) f(2x – 7) nin eşiti nedir?

d) $f\left(x^2 + x - 1\right)$ **in eşiti nedir?**

Çözüm

Bu tür soruları çözerken şunu unutmayın yeter.
Fonksiyonda x yerine değer yazarken o eşitlikte x gördüğünüz her yere aynı değeri yazmak lâzım. Yoksa cevap çıkmıyor da☺

Bakalım.

a) x = 4 için f(4) = 3.4 + 2 = 14 tür.

b) $x = \frac{5}{3}$ için $f\left(\frac{5}{3}\right) = 3 \cdot \frac{5}{3} + 2 = 7$ olur.

c) Bunda x gördüğünüz yere 2x – 7 yazmak lâzım ki f(2x – 7) elde edilebilsin. $x \rightarrow 2x - 7$ için
f(2x – 7) = 3(2x – 7) + 2 = 6x – 19 bulunur.

d) Şimdi de x yerine $x^2 + x - 1$ yazmak lâzım. x yerine bunu yazınca $f(x^2 + x - 1)$ ifadesinin eşiti
$f(x^2 + x - 1) = 3(x^2 + x - 1) + 2 = 3x^2 + 3x - 1$ olur.

Bu arada şunu söyleyeyim. Bu işlem aslında bileşke işlemi ve bunu daha sonra anlatacağım tekrardan. Ama önemine binaen başta verdim. Çünkü fonksiyondaki en önemli olaylardan biri bu.
Ve şunu da söyleyeyim. Fonksiyonun kuralı nasıl olursa olsun. Temel mantığı hep aynı. Yani, senden istenen ifadeyi elde etmek için x gördüğün yerlere kaç yazman gerekiyor. Bunu bul. Ve x gördüğün her yere aynı değeri yaz.
Anlaşıldı mı?

Örnek Soru

$$f\left(\frac{x+5}{x-1}\right)=3x^2+2x+1$$

olduğuna göre, f(7) kaçtır?

Çözüm

Soruda bizden istenen f(7) değeri. O halde x e kaç verelim ki f(7) yi elde etmiş olalım. x e 7 değerini, vermeyeceğimizi görmüş olmanız lâzım. Eğer x gördüğünüz yerlere 7 yazarsanız $f\left(\frac{7+5}{7-1}\right)=f(2)$ yi elde edersiniz.

Oysa biz f(7) yi elde etmek istiyorduk. Bunun için f nin parantez içini 7 ye eşitleyin. $\frac{x+5}{x-1}=7$ den $x=2$ olur ki bu x gördüğünüz yerlere 2 yazdığınızda istediğiniz f(7) yi elde edeceğiniz anlamına gelir.
x yerlerine 2 yazalım bakalım. x = 2 için

$f\left(\frac{2+5}{2-1}\right)=f(7)=3\cdot2^2+2\cdot2+1=17$ bulunur.

Var mı bunda bi problem?

Örnek Soru

$$f(x-1)=\begin{cases}x+4, & x<3 \text{ ise}\\ x-2, & x\geq 3 \text{ ise}\end{cases}$$

olduğuna göre, f(1) + f(3) toplamı kaçtır?

Çözüm

Bu tür fonksiyonlara **parçalı fonksiyon** diyoruz. Gördüğünüz gibi fonksiyon iki parçadan oluşmuş.
f(1) için x = 2 vermek lâzım. x = 2 için de üstteki parçayı kullanmak lâzım. Çünkü x < 3 için üstteki parça geçerli.

x = 2 için f(2 – 1) = f(1) = 2 + 4 = 6 bulunur.
f(3) için ise x = 4 vermek lâzım. Bu durumda ise alttaki parçayı kullanmamız lâzım. Çünkü x ≥ 3 için alttaki parça geçerli.
x = 4 için f(4 – 1) = 4 – 2 = 2 bulunur.
Soruda istenen de zaten bu iki değerin toplamı.
Dolayısıyla f(1) + f(3) = 6 + 2 = 8 bulunur.

Bazı sorularda çözüme adım adım gidilir. Yani istene değeri bulmak için iki üç farklı değer vermeniz gerekebilir. Örnek vereyim.

Örnek Soru

f(2x + 1) = x.f(2x – 1) + 3

f(1) = 4 olduğuna göre, f(5) kaçtır?

Çözüm

Mantık yine aynı.
x e kaç verelim ki f(5) i elde edelim.
Eğer tek hamle de sonuca ulaşamayacaksanız (ki bunda öyle) x e değer verince işinize yarayacak bir şeyler bulacak şekilde değer vermeye çalışın.
Bu soruda x = 2 verince f(5) = 2f(3) + 3 oluyor.
f(3) ü bilmiyoruz ki☺
O halde şimdi f(3) ü bulamaya çalışalım.
x = 1 verince f(3) = 1.f(1) + 3 oluyor.
Zaten f(1) i biliyorduk.
f(1) = 4 olduğundan f(3) = 1.4 + 3 = 7 oluyor.
Artık f(3) ü biliyoruz. Bu değeri ilk elde ettiğimiz eşitlikteki f(3) yerine yazarsak f(5) i bulabiliriz.
Neyse bulalım.
f(5) = 2.7 + 3 = 17 imiş.
Adım adım gidip verilen değerden hareketle istenen değere ulaştık.

Bu tür sorularda şunu da yapabilirsiniz.
İlk önce f(1) den hareketle f(3) ü bulur sonra da f(3) ü kullanarak f(5) i bulabilirsiniz. Çoğu kez bu daha pratiktir.
Dediğim şu
x = 1 için f(3) = 1.f(1) + 3 = 4 + 3 = 7
x = 2 için f(5) = 2.7 + 3 = 17 bulunur.

Bu tür yani, çözüme adım adım gidilen sorulardaki sıkıntı şurada çıkıyor. x e kaç vererek çözüme başlayalım?
x e öyle bir değer verin ki bulacağınız f(?) bir sonraki adımda işinize yarasın. Meselâ bu soruda x e ilk önce 0 verseydiniz de yine f(1) i elde edebilirdiniz. Ama f(1) değerini yerine yazınca bulacağınız f(–1) değeri hiçbir işinize yaramazdı.

İşin kuralı şu aslında; **x e değer verdiğinizde bulacağınız f(?) değeri verilen f değeri ile istenen f değeri arasında olmalı.**

1. f = {(1,3), (2, 5), (3,– 2)}

olduğuna göre, f(1) + f(2) toplamı kaçtır?

2. f = {(– 1, 5), (2, 4), (0, 3)}

olduğuna göre, 3f(– 1) – f(0) farkı kaçtır?

3. f = {(1,3), (2, 5), (3,– 2)}

g = {(1,0), (2,– 3), (3, 1)}

olduğuna göre, f(1). g(3) çarpımı kaçtır?

Fonksiyon Sayısı

4. A = { 2, 3, 4 }

B = { a, b }

olduğuna göre, A dan B ye tanımlı fonksiyon sayısı kaçtır?

5. A = { 1, 2, 3 }

B = { a, b, Δ }

olduğuna göre, A dan B ye tanımlı fonksiyon sayısı kaçtır?

6. s(A) = 3

s(B) = n

olmak üzere, A dan B ye tanımlı fonksiyon sayısı 64 olduğuna göre, n kaçtır?

Fonksiyonda görüntü bulma

Bir fonksiyonda x e (değişkene veya değişkenlere) uygun koşullarda her değeri verebilirsiniz. Yeter ki x gördüğünüz her yere aynı değeri yazın.

7. f (x) = 3x – 2

olduğuna göre, f(5) değeri kaçtır?

8. f(x) = 2x + 4

olduğuna göre, f(2) + f(3) toplamı kaçtır?

9. $f(x) = |x+2|$

olduğuna göre, f(– 5) değeri kaçtır?

10. $f(x) = |x-4| - |x+1|$

olduğuna göre, f(2) + f(3) toplamı kaçtır?

11. $f(x) = 2^{x+1} - 9$

olduğuna göre, f(3) değeri kaçtır?

12. $f(x) = \sqrt{x^2+x+5}$

olduğuna göre, f(4) değeri kaçtır?

13. $f(x) = \frac{5x+7}{4x-3}$

olduğuna göre, f(1) değeri kaçtır?

14. $f(x) = 3x + c$

olmak üzere, f(2) + 3f(1) = 23 olduğuna göre, c kaçtır?

15. $f(x) = 3^{x-1}$

$f(a) = 81$

olduğuna göre, a kaçtır?

16. $f(x) = \frac{3x+4}{2x-1}$

f(k) = 2

olduğuna göre, k kaçtır?

1. $f(x) = x^2 + bx + 1$

$f(2) = f(-1)$

olduğuna göre, b kaçtır?

2. $f(x+1) = 4x + 2$

olduğuna göre, f(3) değeri kaçtır?

3. $f(x-1) = \frac{3x+4}{2x-3}$

olduğuna göre, f(1) değeri kaçtır?

4. $f(2x-3) = 3x + 5$

olduğuna göre, f(3) değeri kaçtır?

5. $f\left(\frac{3x+1}{4x-3}\right) = x^3 + 2x^2 + x + 1$

olduğuna göre, f(4) değeri kaçtır?

6. $f\left(\frac{5x-1}{4x-3}\right) = -x^5 + 4x^3 + 5$

olduğuna göre, f(4) değeri kaçtır?

7. $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = x^2 - x + 2$

olduğuna göre, f(3) değeri kaçtır?

8. $f\left(2^x + 1\right) = 5^x + 10$

olduğuna göre, f(5) değeri kaçtır?

9. $f\left(\sqrt{x}+1\right)=x^2+3$

olduğuna göre, f(3) değeri kaçtır?

10. $f(mx-3)=4x+1$ olmak üzere,

$f(5)=17$ olduğuna göre, m kaçtır?

11. $f(x)=x^2$ olmak üzere,

$f(x+3)-f(x-1)=7x+12$

olduğuna göre, x değeri kaçtır?

12. $f(x)=x^2-1$

$g(x)=f(x+1)+2x+3$

olduğuna göre, g(2) değeri kaçtır?

13. $f(2x-1)=2x^2+10x-2f(1)$

olduğuna göre, f(1) değeri kaçtır?

14. $f(3x-1)=x^2+8x-2f(2)$

olduğuna göre, f(5) değeri kaçtır?

15. $f(x)=\dfrac{x^4-1}{\left(x^2+1\right)(x-1)}$

olduğuna göre, f(4) değeri kaçtır?

16. $f(x+1)=\dfrac{x^3+1}{x^2-x+1}$

olduğuna göre, $\dfrac{f(10)}{f(5)}$ oranı kaçtır?

1. $f(x)=\dfrac{\left(1+x+x^2+x^3\right)(1-x)^2}{1-x-x^2+x^3}$

olduğuna göre, $f\left(\sqrt{2}\right)$ değeri kaçtır?

2. f: A → R

A = { 0, 1, 2 }

$f(x)=4x+2$

olduğuna göre, fonksiyonun görüntü kümesi nedir?

3. f: A → R

A = {– 2, – 1, 0, 1, 2}

$f(x)=x^2+x$

olduğuna göre, fonksiyonun görüntü kümesi nedir?

4. f: A → B ye bire bir örten bir fonksiyon olmak üzere,

B = { 7, 10, 19 }

$f(x)=3x-2$

olduğuna göre, A kümesinin elemanlarının toplamı kaçtır?

5. $f(x)=\begin{cases} x+1, & x \geq 3 \text{ ise} \\ x^2+2, & x<3 \text{ ise} \end{cases}$

olduğuna göre, f(2) + f(4) toplamı kaçtır?

6. $f(x)=\begin{cases} 2x+\sqrt{x-1}, & x \text{ tek ise} \\ 3x-\sqrt[3]{x+6}, & x \text{ çift ise} \end{cases}$

olduğuna göre, f(5) – f(2) farkı kaçtır?

7. $f(x)=\begin{cases} 2x-4, & x \equiv 0 \pmod{3} \\ x^2-2, & x \equiv 1 \pmod{3} \\ x^2+x, & x \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$

olduğuna göre, f(1) + f(2) + f(3) toplamı kaçtır?

8. $f(x)=\begin{cases} x^2+4, & x<0 \text{ ise} \\ x^2+2, & x \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$

olduğuna göre, f(– 1).f(1) çarpımı kaçtır?

9. $f(x-3)=\begin{cases} x+4, & x<0 \text{ ise} \\ x-2, & x\geq 0 \text{ ise} \end{cases}$

olduğuna göre, f(– 2) değeri kaçtır?

10. $f(x)=\begin{cases} 3x-4, & x<1 \text{ ise} \\ x+2, & x\geq 1 \text{ ise} \end{cases}$

$g(x) = 2x + 2$

olduğuna göre, g(f(0)) değeri kaçtır?

11. $f(x^2+x)=5\left(x^2+x\right)+2$

olduğuna göre, f(3) değeri kaçtır?

12. $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{3x+1}{x}$

olduğuna göre, f(61) değeri kaçtır?

13. $f\left(\frac{x+1}{3x-1}\right)=\frac{3x-1}{x+1}$

olduğuna göre, $f\left(\frac{1}{25}\right)$ **değeri kaçtır?**

14. $f\left(2^x\right)=3\cdot 4^x-1$

olduğuna göre, f(3) değeri kaçtır?

15. $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$

olduğuna göre, f(3) değeri kaçtır?

16. $f(x)=x^{10}-27x^7+5x+1$

olduğuna göre, f(3) değeri kaçtır?

1. $f(x) = x^2 - 20x + 100$

olduğuna göre, $f\left(10-\sqrt{5}\right)$ **kaçtır?**

2. $f(x) = x^4 - 6x^2 + 9$

olduğuna göre, $f\left(\sqrt{2}-1\right)$ **kaçtır?**

3. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

olduğuna göre, $f\left(\sqrt[3]{2}-1\right)$ **kaçtır?**

4. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

olduğuna göre, $f\left(\sqrt[3]{5}+1\right)$ **kaçtır?**

5. $f(x)=(x-2)^3+3(x-2)^2+3(x-2)+1$

olduğuna göre, $f\left(\sqrt[3]{2}+1\right)$ **kaçtır?**

6. $f(x) = 2^x$ olmak üzere,

$\frac{f(a+5)}{f(b-2)}=32$

olduğuna göre, a – b farkı kaçtır?

7. $f(x) = x^2 - 3x$ olmak üzere,

$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=2$

olduğuna göre, a + b toplamı kaçtır?

8. $f(x)=\frac{21-x}{x+11}$

olduğuna göre, f(1).f(2).f(3). ... f(9) çarpımı kaçtır?

9. $f(x) = x^3 + mx + 1$ olmak üzere,

f(– 5) = 10 olduğuna göre, f(5) kaçtır?

10. f(a + b) = f(a) + f(b) olmak üzere,

f(1) = 2 olduğuna göre, f(2) kaçtır?

11. f(a + b) = f(a) + f(b) olmak üzere,

f(1) = 2 olduğuna göre, f(3) kaçtır?

12. f(a.b) = f(a) + f(b) olmak üzere,

f(2) = 3 olduğuna göre, f(4) kaçtır?

13. f(a.b) = f(a) + f(b) olmak üzere,

f(2) = 3 olduğuna göre, f(16) kaçtır?

14. f(x + 1) = 3x + f(x)

f(1) = 3 olduğuna göre, f(3) kaçtır?

15. f(2x + 1) = f(2x – 1) + 3x + 2

f(1) = 2 olduğuna göre, f(5) kaçtır?

16. f(3x + 1) = f(x – 1) + 5

f(1) = 5 olduğuna göre, f(25) kaçtır?

1. $f: Z \to Z$

f(x + 2) = x + f(x – 1)

f(0) = 5 olduğuna göre, f(6) kaçtır?

2. n tam sayıları için

f(n + 1) = 3n + f(n – 1)

f(2) = 5 olduğuna göre, f(8) kaçtır?

3. f(2x + 1) = 3x + f(2x – 1)

f(1) = 2 olduğuna göre, f(7) kaçtır?

4. $f: N^+ \to R$

f(x + 1) = x.f(x)

f(1) = 2 olduğuna göre, f(4) kaçtır?

5. $f: N^+ \to R$

$$f(x+1) = \frac{x \cdot f(x)}{12}$$

f(1) = 144 olduğuna göre, f(4) kaçtır?

6. f(x + 2) = f(x) + 3 olmak üzere,

f(1) = 2 olduğuna göre, f(21) kaçtır?

7. $f: N^+ \to R$

f(x + 1) = x.f(x)

f(1) = 1 olduğuna göre, f(100) kaçtır?

8. $f: R^+ \to R$

$f(x+1) = \left(\frac{x}{x+1}\right) \cdot f(x)$ olmak üzere,

f(1) = 36 olduğuna göre, f(9) kaçtır?

9. $f : R \to R$

$f(x+2) + (x-1) \cdot f(x) = 3x^2 + x + 6$

olduğuna göre, f(5) kaçtır?

Doğrusal fonksiyon

Grafiği doğru olan fonksiyona doğrusal fonksiyon denir. f(x) = ax + b şeklinde ifade edilebilir.

10. f(x) = ax + b olmak üzere,

f(1) = 6

f(4) = 12

olduğuna göre, f(0) kaçtır?

11. f doğrusal (lineer) fonksiyon olmak üzere,

f(0) = – 3

f(3) = 9

olduğuna göre, f(2) kaçtır?

12. f doğrusal (lineer) fonksiyon olmak üzere,

f(2) = 7

f(5) = 19

olduğuna göre, f(– 4) kaçtır?

Birebir Fonksiyon

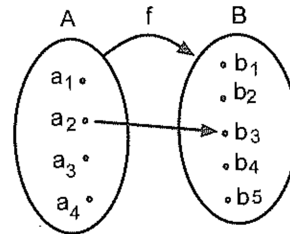
Tanım kümesinin her elemanının görüntüsü farklı olan fonksiyondur.

$x_1 = x_2$ iken $f(x_1) = f(x_2)$ veya

$x_1 \neq x_2$ iken $f(x_1) \neq f(x_2)$ oluyorsa f bire bir fonksiyondur.

13. Aşağıda $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ve

$B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ kümeleri verilmiştir.



A dan B ye $f(a_2) = b_3$ olacak biçimde kaç tane birebir f fonksiyonu tanımlanabilir?

14. A = {1, 2 }

B = {3, 5, 6 }

olduğuna göre, A dan B ye kaç tane bire bir fonksiyon tanımlanabilir?

15. A = {1, 2, 3 }

B = {3, 5, 6, 7, 8 }

olduğuna göre, A dan B ye f(1) = 3 olacak şekilde kaç tane bire bir fonksiyon tanımlanabilir?

1. Gerçel sayılar kümesinde tanımlı aşağıdaki fonksiyonlardan hangileri bire birdir?

I. f(x) = 3x + 5

II. f(x) = – 2x + 8

III. $f(x) = x^2$

IV. $f(x) = x^3$

2. Gerçel sayılar kümesinde tanımlı aşağıdaki fonksiyonlardan hangileri bire birdir?

I. $f(x) = x^2 + 2x$

II. f(x) = x + 3

III. $f(x) = -x^2 + 2$

IV. $f(x) = x^3 + 1$

Fonksiyonun değer kümesinde boşta eleman kalmamış ise bu fonksiyona **örten fonksiyon** denir. Hem bire bir hem de örten olan fonksiyona **birebir örten fonksiyon** denir.

3. f: A → B ye birebir ve örten fonksiyon ve

s(B) = n +1

s(A) = 2n – 6

olduğuna göre, n kaçtır?

4. A = {1, 2, 3, 4 }

B = {2, 4, 6, 8 }

olduğuna göre, A dan B ye kaç tane bire bir örten fonksiyon tanımlanabilir?

Sabit Fonksiyon

Tanım kümesinin her elemanının değer kümesindeki görüntüsü aynı olan fonksiyondur.

f(0) = f(1) = f(2) = f (3) = ... = f(x) = c = sabit

Sabit fonksiyonda x li terim olmaz. x li terim olsa sabit olmaz zaten.☺ Eğer size verilen sorudaki sabit fonksiyonda x li terimler varsa işiniz x li terimleri yok edecek ayarları yapmak olmalı.

Örnek Soru

f sabit fonksiyon olmak üzere

$f(x) = (m-3)x^2 + (n-2)x + mn + 4$

olduğuna göre, f(5) kaçtır?

Çözüm

Sabit fonksiyonda x li mix li terim olmaz. Eğer varsa polinom tipi fonksiyonlarda kat sayıları sıfır olmalı. Rasyonel fonksiyonlarda da katsayıları orantılı olmalı ki x ler yok olsun ve fonksiyon x ten bağımsız yani, sabit olsun.

f sabit olduğundan

$f(x) = \underbrace{(m-3)}_{0}x^2 + \underbrace{(n-2)}_{0}x + mn + 4$

m – 3 = 0 dan m = 3,

n – 2 = 0 dan n = 2 olmalı.

Bu m ve n değerleri için f(x) = 3.2 + 4 = 10 a eşittir.

Dolayısıyla f(5) = 10 dur.

Bir de $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ fonksiyonu sabit fonksiyon ise, $f(x) = \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ dir.

5. f sabit fonksiyon olmak üzere

$f(x) = (m - 2)x + 3$

olduğuna göre, m kaçtır?

6. f sabit fonksiyon olmak üzere,

$f(x) = (m^3 - 8)x^2 + (n + 2)x + 4$

olduğuna göre, m.n çarpımı kaçtır?

7. f sabit fonksiyon olmak üzere

$f(x) = (m + 3)x + 3m - 1$

olduğuna göre, f(2) kaçtır?

8. f sabit fonksiyon olmak üzere,

$f(x) = (m - 1)x^2 + (n - 2)x + mn + 3$

olduğuna göre, f(7) kaçtır?

9. f sabit fonksiyon olmak üzere,

$f(x) = (m - 2)x^2 + (n - 3)x + mn - p + 2$

$f(-3) = 1$

olduğuna göre, p kaçtır?

10. f sabit fonksiyon olmak üzere,

$f(x) = \frac{4x + c}{3x + 9}$

olduğuna göre, c kaçtır?

11. f sabit fonksiyon olmak üzere,

$f(x) = \frac{2x + m + 2}{5x + 2m - 1}$

olduğuna göre, m kaçtır?

12. f sabit fonksiyon olmak üzere,

$f(x) = \frac{ax + 6}{2x + d}$

olduğuna göre, a.d çarpımı kaçtır?

Birim Fonksiyon

Tanım kümesindeki her elemanın görüntüsü kendisi ise bu fonksiyon birim (etkisiz) fonksiyondur.
Eğer f fonksiyonu birim fonksiyon ise,

$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3, \ldots$

Genel olarak **$f(x) = x = I$**

$f(2x+5) = 2x+5$

$f(x^2 + x + 3) = x^2 + x + 3$

Çoğaltabiliriz bunları. Şuna dikkat edin. Birim fonksiyonun içi dışı bir. Ne giriyorsa o çıkıyor☺

Örnek Soru

f birim fonksiyon olmak üzere,

$f(x) = (a - 2)x^2 + (2b - 7)x + c - 1$

olduğuna göre, a + b + c toplamı kaçtır?

Çözüm

Birim fonksiyonda f nin yanındaki parantezin içi neyse eşitliğin sağ tarafı ona eşittir. Yani, içi dışı birdir.

$f(x) = \underbrace{(a - 2)}_{0}x^2 + \underbrace{(2b - 7)}_{1}x + \underbrace{c - 1}_{0}$

$a - 2 = 0$ dan $a = 2$,

$2b - 7 = 1$ den $b = 4$ ve

$c - 1 = 0$ dan $c = 1$ olması lâzım ki fonksiyonun içi dışı bir olsun.

Soruda istenen değer ise $a + b + c = 2 + 4 + 1 = 7$ dir.

1. f birim fonksiyon olmak üzere,

$f(x) = (a - 2)x + b - 5$

olduğuna göre, a + b toplamı kaçtır?

2. f birim fonksiyon olmak üzere,

$f(x) = (a - 5)x^2 + (b + 1)x + c - 2$

olduğuna göre, a + b + c toplamı kaçtır?

3. f birim fonksiyon olmak üzere,

$f(4x + 1) = (a - 2)x + 3b - 11$

olduğuna göre, a.b çarpımı kaçtır?

4. f birim fonksiyon olmak üzere,

$f(x^2 + 3x + 1) = (a - 1)x^2 + bx + c - 4$

olduğuna göre, a.b.c çarpımı kaçtır?

5. g birim fonksiyon olmak üzere,

$f(2x + g(x + 1)) = 5x + 8$

olduğuna göre, f(10) kaçtır?

6. f birim fonksiyon olmak üzere,

$f(2m + 7) = f(3m - 1)$

olduğuna göre, m kaçtır?

7. g birim fonksiyon olmak üzere,

$f(2x) - g(3x+1) = x^2 - 3x$

olduğuna göre, f(4) kaçtır?

8. g birim fonksiyon olmak üzere,

$f(2x) = g(x^2) + g(3x+1)$

olduğuna göre, f(2) kaçtır?

Ters Fonksiyon

Bire bir ve örten olan bir f fonksiyonunun tanım ve değer kümelerinin yer değiştirmesiyle elde edilen fonksiyona **f nin tersi** denir ve f^{-1} ile gösterilir.

$f: A \to B$ ise $f^{-1}: B \to A$ dır.

$f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$

Yani, f bire bir örten fonksiyon iken,

f(3) = 5 ise $f^{-1}(5) = 3$ tür.

f(2x – 3) = x + 5 iken $f^{-1}(x+5) = 2x - 3$ tür.

$f^{-1}(4x+1) = x^3$ ise $f(x^3) = 4x + 1$ dir.

Ters fonksiyonda sayısal bir değerin görüntüsü aranırken çoğu zaman fonksiyonun tersi alınmaz. Eğer ben tersini alarak çözmek istiyorum diyen olursa. Ona diyeceğim. "Çok safsın Can☺"

Örnek Soru

$f(3x - 5) = 4x + 2$

olduğuna göre, $f^{-1}(14)$ kaçtır?

Çözüm

Bu tür sorularda f(x) in neye eşit olduğunu bulmanıza gerek yok.

$f(3x-5) = 4x+2$ ise $f^{-1}(4x+2) = 3x-5$ tir.

Dolayısıyla 4x + 2= 14 ten x = 3 için istenen

$f^{-1}(14)$ değeri bulunur.

$f^{-1}(14) = 4$ tür.

9. $f = \{(1, 4), (2, 0), (3, 6)\}$

olduğuna göre, f fonksiyonunun ters fonksiyonu olan f^{-1} nedir?

10. $f(3x + 5) = 4x - 1$

olduğuna göre, $f^{-1}(3)$ kaçtır?

11. $f(2x - 1) = 3x + 1$

olduğuna göre, $f^{-1}(10)$ kaçtır?

1. $f^{-1}(5x+1) = 3x - 2$

olmak üzere, f(4) kaçtır?

2. $f^{-1}(x + a) = 2x - 1$

f(3) = 8 olduğuna göre, a kaçtır?

3. $f^{-1}\left(\frac{3x-2}{k}\right) = x + 2$

f(4) = 2 olduğuna göre, k kaçtır?

4. f(x) = mx + n olmak üzere,

$f^{-1}(13) = 4$

$f^{-1}(7) = 2$

olduğuna göre, m + n toplamı kaçtır?

5. f doğrusal fonksiyon olmak üzere,

$f^{-1}(8) = 2$

$f^{-1}(10) = 3$

olduğuna göre, f(5) kaçtır?

Fonksiyonun Tersini bulma

y = f(x) olarak verilen bir fonksiyonun tersi bulunurken yapılacak işlem çok basit aslında.

İlk önce verilen fonksiyonda x in y = f(x) türünden değerini bulun. Sonra da x yerine $f^{-1}(x)$ yazın,
y = f(x) yerine de x tabii ki.
Aslında bütün mesele x i yalnız bırakabilmek.

Örnek Soru

$f(x) = \frac{2x-3}{5}$

olduğuna göre, ters fonksiyon olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

Çözüm

Kuralı belli olan bir fonksiyonun tersini bulurken yapmanız gereken en önemli şey x i yalnız bırakmaktır. (yani, x in y = f(x) türünden değerini bulmak.)

y = f(x) idi. $y = \frac{2x-3}{5}$ eşitliğinden

5y = 2x – 3 ve buradan da $x = \frac{5y+3}{2}$ dir.

Bundan sonraki adım y yerine x ve x yerine de $f^{-1}(x)$ yazmak. Olay bundan ibaret☺

Dolayısıyla bu fonksiyonun tersi $f^{-1}(x) = \frac{5x+3}{2}$ dir.

Anlaşılmış mıdır anlatmak istediğim şey?
Anlaşıldıysa problem yok☺

6. $f(x) = 3x - 1$

olduğuna göre, ters fonksiyon olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

7. $f(x) = \frac{2x - 3}{4}$

olduğuna göre, ters fonksiyon olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

8. f fonksiyonun tersi $f^{-1}(x)$ olmak üzere,

$f^{-1}(x) = \frac{-5x + 7}{3}$

olduğuna göre, f(x) nedir?

9. $f(x) = \frac{x - 2}{3}$

fonksiyonunun tersi $f^{-1}(x) = ax + b$ olduğuna göre, a + b toplamı kaçtır?

10. $f^{-1}(x) = \frac{3x - 2}{4}$

olmak üzere, f(x) = ax + b olduğuna göre, a + b toplamı kaçtır?

Pırt olarak,

$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ ise $f^{-1}(x) = \frac{-dx + b}{cx - a}$ dır.

Yani, sadece a ve d nin hem işaret hem de yerleri değişiyor.

11. $f(x) = \frac{3x - 1}{2x - 1}$

olduğuna göre, ters fonksiyon olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

12. $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$

fonksiyonunun tersi $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

13. $f(x) = \frac{-2x + 2}{3x - 1}$

olduğuna göre, ters fonksiyon olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

1. $f(x) = \frac{3x}{2x - 3}$

olduğuna göre, ters fonksiyon olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

2. $f(x) = \frac{2}{3x - 3}$

olduğuna göre, ters fonksiyon olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

3. $f(x) = \frac{2x + 3}{-3x}$

olduğuna göre, ters fonksiyon olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

4. $f(x) = \frac{x + 1}{2 - 3x}$

olduğuna göre, ters fonksiyon olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

5. f fonksiyonunun tersi olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu

$f^{-1}(x) = \frac{x - 3}{x + 2}$

olduğuna göre, f(x) fonksiyonu nedir?

6. $f(x) - 1 = \frac{2x + 1}{x - 3}$

olduğuna göre, ters fonksiyon olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

7. $f(x) = \frac{3f(x) - 3x + 1}{2x - 2}$

olduğuna göre, ters fonksiyon olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

8. m pozitif reel sayı olmak üzere

$f(x) = \frac{9x + 1}{2x - m^2}$

fonksiyonu için $f(x) = f^{-1}(x)$ olduğuna göre, m kaçtır?

9. R – {3} te tanımlı f fonksiyonu

$$f(x)=\frac{5x+2}{x-3}$$

olduğuna göre f fonksiyonunun değer kümesi nedir?

10. f: R – {a} → R – {b}

$$f(x)=\frac{6x+1}{x-2}$$

olduğuna göre, a.b çarpımı kaçtır?

11. f: R – {a} → R – {b}

y = f(x) fonksiyonu için

$$xy-2y-3x+2=0$$

olduğuna göre, a + b toplamı kaçtır?

12. $f(x)=\sqrt{x-2}$

olduğuna göre, ters fonksiyon olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

13. $f(x)=\sqrt{x}-3$

olduğuna göre, ters fonksiyon olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

14. $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$

olduğuna göre, ters fonksiyon olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

15. $f(x)=\sqrt{x+1}-2$

olduğuna göre, ters fonksiyon olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

16. $f(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{2}$

olduğuna göre, ters fonksiyon olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

1. $f(x)=(x-2)^3-1$

olduğuna göre, ters fonksiyon olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

2. y = f(x) olmak üzere,

$$2y-3x+1=0$$

olduğuna göre, ters fonksiyon olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

3. y = f(x) olmak üzere,

$$2xy-3x+y-1=0$$

olduğuna göre, ters fonksiyon olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

4. y = f(x) olmak üzere,

$$x=\frac{f(x)-5}{3f(x)-2}$$

olduğuna göre, ters fonksiyon olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

5. y = f(x) olmak üzere,

$$x=\frac{2f(x)-1}{3-f(x)}$$

olduğuna göre, ters fonksiyon olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

6. y = f(x) olmak üzere

$$x=\frac{[f(x)]^2+2}{1-2f(x)}$$

olduğuna göre, ters fonksiyon olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

7. f:[2, ∞) → [3, ∞)

$$f(x)=(x-2)^2+3$$

olduğuna göre, ters fonksiyon olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

8. f:[2, ∞) → [1, ∞)

$$f(x)=x^2-4x+5$$

olduğuna göre, ters fonksiyon olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

9. $f:[-1, \infty) \to [4, \infty)$

$f(x) = x^2 + 2x + 5$

olduğuna göre, ters fonksiyon olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

10. $f: (-\infty, 2] \to [1, \infty)$

$f(x) = x^2 - 4x + 5$

olduğuna göre, ters fonksiyon olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

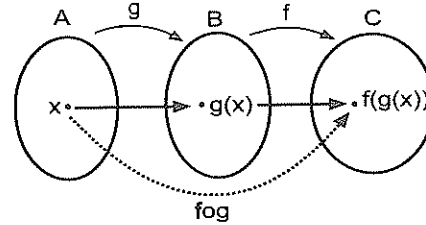
11. $f:\left(-\infty, \frac{-1}{2}\right] \to [1, \infty)$

$f(x) = 4x^2 + 4x + 2$

olduğuna göre, ters fonksiyon olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

Bileşke Fonksiyon

g: A → B ve f: B → C fonksiyonları tanımlanmış olsun.



fog : A → C ve (fog)(x) = f(g(x)) tir.

İki fonksiyonun bileşkesi bulunurken; sağdaki fonksiyon soldaki fonksiyonda x görülen yerlere yazılır.
Bir örnek üzerinde göstereyim.

Örnek Soru

$f(x) = 2x + 1$

$g(x) = x^2 - 3$

olduğuna göre, (fog)(x) ve (gof)(x) fonksiyonlarını bulalım.

Çözüm

(fog)(**x**) = f(g(x)) idi. Yani, f de x yerine g(x) yazılarak (fog)(x) bulunmuş olur.

$(fog)(x) = (2x+1)o(x^2-3)$

$= 2(x^2-3)+1$

$= 2x^2 - 5$

Yine aynı şekilde

$(gof)(x) = (x^2-3)o(2x+1)$

$= (2x+1)^2 - 3$

$= 4x^2 + 4x + 1 - 3$

$= 4x^2 + 4x - 2$

olarak bulunmuş olur.

Burada (fog)(x) ve (gof)(x) in farklı şeyler olduğuna dikkat ettiniz mi?

Yalnız şunu da söyleyeyim. (fog)(5), $(f^{-1}og)(2)$ gibi sayısal değerler sorulduğunda bileşe fonksiyonu bulmanıza gerek yok. Düşünün bakalım. Acep neden diye?

1. $f(x) = 2x - 1$

$g(x) = x^2 + 3$

olduğuna göre, bileşke fonksiyon olan (fog)(x) fonksiyonu nedir?

2. $f(x) = 3x - 2$

$g(x) = 2x + 1$

olduğuna göre, (gof)(x) nedir?

3. $f(x) = 2x + 1$

olduğuna göre, (fof)(x) nedir?

4. $f(x) = 3x - 1$

olduğuna göre, f(2x + 1) nedir?

5. $f(x) = (x-3)^2$

$g(x) = 2x - 6$

olduğuna göre, $(fog^{-1})(x)$ in eşiti nedir?

6. $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$

$g^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

olduğuna göre, (fog)(x) in eşiti nedir?

7. $f(x) = \frac{x-2}{3}$

$g(x) = 2x^2 + x - 1$

olduğuna göre, $(f^{-1}og)(x)$ in eşiti nedir?

8. $(fog)(x) = x^2 - 3$

$h(x) = x - 1$

olduğuna göre, (fogoh)(x) nedir?

9. $(fog)(x) = 2x^2 + 1$

$h(x) = 3x$

olduğuna göre, (fo(goh))(x) nedir?

10. $f(x) = 4x - 5$

$g(x) = 3x + 1$

olduğuna göre, (gof)(2) kaçtır?

11. $f(x) = 5x + 2$

$g(x) = 3x + 1$

olduğuna göre, $(fog^{-1})(10)$ **kaçtır?**

12. $f(x) = x^2 - 99$

$g(x) = 3x + 1$

$h(x) = x^2 + 2x$

olduğuna göre, (fogoh)(1) kaçtır?

13. $f(x) = x^2 - 5$

olduğuna göre, (fofof)(2) kaçtır?

14. $f^{-1}(x + 1) = 2x - 3$

$g(x + 2) = x$

olduğuna göre, (fog)(3) değeri kaçtır?

15. $f(x - 1) = x^2 + 1$

$g(x - 1) = 2x + 4$

olduğuna göre, (fog)(2) değeri kaçtır?

16. $f(x) = \frac{2x + 8}{2x - 1}$

$g^{-1}(x) = \frac{x + 1}{2}$

olduğuna göre, (fog)(1) değeri kaçtır?

Bileşke fonksiyonla ilgili özellikler

- $(fog) \neq (gof)$

Yani değişme özelliği yoktur. Tabii ki eşit oldukları durumlar da olabilir. Düşünün bakalım bi.

- $(fogoh) = (fog)oh = fo(goh)$

Bunun yanisi de şu: parantezi nereye koyarsanız koyun. Fark etmiyor. Matematikçesi ise birleşme özelliği vardır.

- $f^{-1}of = fof^{-1} = I$

Yani, bir fonksiyonla bu fonksiyonun tersinin bileşkesi birim fonksiyonu (x) verir.

- $f\ o\ I = I\ o\ f = f$

Adı üstünde birim (etkisiz) fonksiyon işte.
f ile bileşkesini alınca yine f ye eşit oluyor. Yani, birim (etkisiz) fonksiyonun hiçbir etkisi olmuyor bu işte☺

- $(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$

Fark ettiniz mi?
Bileşke fonksiyonun tersi alınırken fonksiyonların hem yerleri değişiyor hem de tersleri alınıyor.

Yine aynı şekilde,

$(fogoh^{-1})^{-1} = hog^{-1}of^{-1}$ olur.

Anladınız mı ne demek istediğimi?

Sıklıkla lâzım olacak (tabii fonksiyonlara çalışırsanız) bir iki durumun matematikçesinden de bahsedeyim.
İnceleyin isterseniz.
Bunları nerede kullanacağınızı da söyliycem.

fog bileşke fonksiyonu verildiğinde f ve g yi nasıl bulabilirsiniz?

$(fog)og^{-1} = f$

$f^{-1}o(fog) = g$

Birinde f yi, diğerinde de g yi elde ettik.

1. $(fog)(x) = 4x^2 - 1$

$f(x) = 3x + 1$

olduğuna göre, g(x) nedir?

2. $(fog)(x) = 9x^2 + 1$

$g(x) = 3x - 1$

olduğuna göre, f(x) nedir?

3. $f\left(\frac{x+2}{3}\right) = x^2 - 4$

olduğuna göre, f(x) nedir?

4. $f(2x + 5) = x^2 - 1$

olduğuna göre, f(x) nedir?

5. $f(x) = x^2 + x$

olduğuna göre, $((fof)of^{-1})(1) + f(2)$ **toplamı kaçtır?**

6. $\left(f^{-1}og\right)(x)=\frac{2x+4}{x-3}$

olduğuna göre, $(g^{-1}of)(x)$ **nedir?**

7. f, g birebir örten fonksiyonlardır.

$\left(fog^{-1}\right)(x)=3x-2$

$\left(gof^{-1}\right)(x)=ax+b$

olduğuna göre, a + b toplamı kaçtır?

8. $f(x) = 3x - 1$

$g(x)=\frac{2x+6}{2x-1}$

$\left(g^{-1}of\right)(p)=1$

olduğuna göre, p kaçtır?

9. $f(x)=\begin{cases}-2x+1, & x>0 \text{ ise}\\ x+4, & x\leq 0 \text{ ise}\end{cases}$

$g(x)=x^2+2$

olduğuna göre, (gof)(3) kaçtır?

10. $f(x)=x^2-2x$

$(fog)(x)=x^2+4x+3$

olduğuna göre, g(x) nedir?

f(x) türünden değerini bulma

11. $f(x) = 4x - 2$

olduğuna göre, f(2x) in f(x) türünden değeri nedir?

12. $f(x)=x^2+4$

olduğuna göre, f(2x) in f(x) türünden değeri nedir?

1. $f(x)=\frac{3x+1}{x-1}$

olduğuna göre, f(2x) in f(x) türünden değeri nedir?

2. $f(x)=\frac{4^x}{2}$

olduğuna göre, f(2x + 1) in f(x) türünden değeri nedir?

3. $f(x)=3^{2x+1}$

olduğuna göre, f(2x − 1) in f(x) türünden değeri nedir?

4. $f(x)=x+\frac{1}{x}$

olduğuna göre, $f\left(x^2\right)$ **in f(x) türünden değeri nedir?**

Permütasyon Fonksiyon

A = { 1, 2, 3, 4, 5} kümesinde tanımlı permütasyon fonksiyonlardan

$f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&1&5&3&2\end{pmatrix}$ $g=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&1&2&3\end{pmatrix}$

fonksiyonları için aşağıdaki soruları cevaplayınız.

5. **f(3) değeri kaçtır?**

6. **f(g(2)) nin değeri kaçtır?**

7. $f^{-1}(4)$ **değeri kaçtır?**

8. **(fog)(5) değeri kaçtır?**

9. $\frac{f(4)+5}{1+g(3)}$ **oranı kaçtır?**

10. $\left(fog^{-1}\right)(2)$ **değeri kaçtır?**

11. $\left(fo\left(gof^{-1}\right)\right)(4)$ **değeri kaçtır?**

12. (fog) fonksiyonunun eşiti nedir?

13. A = { a, b, c, d } kümesinde tanımlı

$f=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & a & b \end{pmatrix}$

fonksiyonunun tersi olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

14. A = { a, b, c, d } kümesinde tanımlı

$f=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & a & b & d \end{pmatrix}$ $g=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & a & b \end{pmatrix}$

fonksiyonları için $x = g^{-1}of$ eşitliğini sağlayan x permütasyon fonksiyonu nedir?

15. A = { 1, 2, 3, 4} kümesinde

$f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $g=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

fonksiyonları için $hof^{-1} = g$ eşitliğini sağlayan h fonksiyonu nedir?

Fonksiyonlarda İşlemler

f(x) = 4x + 2

g(x) = 2x – 1

fonksiyonları için aşağıdaki soruları cevaplayınız.

16. **(f + g)(x) ifadesinin eşiti nedir?**

17. **(f – g)(2) ifadesinin değeri kaçtır?**

18. **(f.g)(3) ifadesinin değeri kaçtır?**

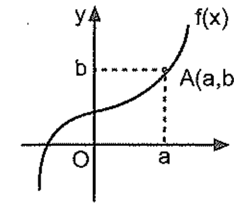
19. $\left(fog+g^{-1}\right)(5)$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

20. $\left(\dfrac{f+g^{-1}}{fog}\right)(1)$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

21. **(2f + 3g)(m) = 29 olduğuna göre, m kaçtır?**

22. **(3f – 2g)(x) = (f.g)(1) olduğuna göre, x kaçtır?**

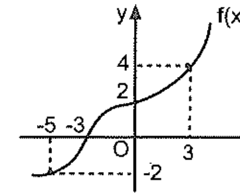
Fonksiyonun Grafiğini Okuma



Şekildeki gibi f fonksiyonunun grafiği A(a,b) noktasından geçiyorsa f(a) = b ve $f^{-1}(b) = a$ dır.

"f(a) kaçtır?" sorusunun cevabı fonksiyonun x = a için aldığı değerdir. Yani, eğri üzerinde apsisi a olan noktanın ordinatıdır.

Örnek Soru



Şekilde grafiği verilen f fonksiyonu için

$\dfrac{f(-5)+f^{-1}(4)}{f(-3)+f(0)}$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

Çözüm

Eğri üzerinde apsis ve ordinatı bilinen noktalar (–5,–2) , (–3,0), (0,2) ve (3,4) noktalarıdır.

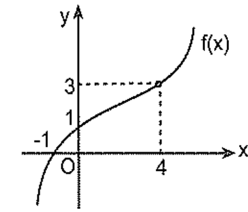
Dolayısıyla f(–5) = –2, f(–3) = 0, f(0) = 2 ve f(3) = 4 tür. Bir de soruda istenen $f^{-1}(4)$ değeri var ki bu da $f(3) = 4$ olduğundan $f^{-1}(4) = 3$ tür.

Bu değerleri istenen ifadede yerine yazarsanız.

$\dfrac{f(-5)+f^{-1}(4)}{f(-3)+f(0)} = \dfrac{-2+3}{0+2} = \dfrac{1}{2}$ bulunur.

Diyeceğim o ki fonksiyon üzerinde apsisi(x) ve ordinatı(y) belli olan noktaları yazabilirseniz bu işi çözmüşsünüz demektir.

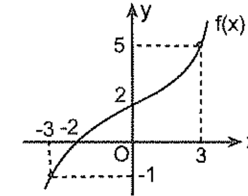
1.



Şekilde f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, f(4) + f(0) + f(– 1) toplamı kaçtır?

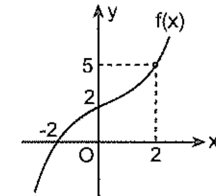
2.



Şekilde f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, $\dfrac{f^{-1}(5)+f(-3)}{f(f(-2))}$ **işleminin sonucu kaçtır?**

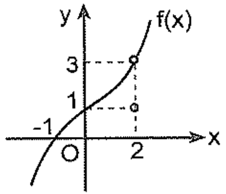
3.



Şekilde f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, $(fofof)(-2)+f^{-1}(2)$ **işleminin sonucu kaçtır?**

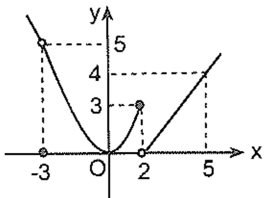
4.



Şekilde f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, f(0) + f(2) toplamı kaçtır?

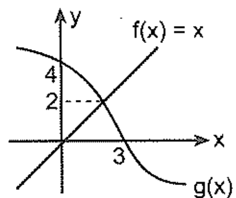
5.



Şekilde f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, f(–3) + f(2).f(5) toplamı kaçtır?

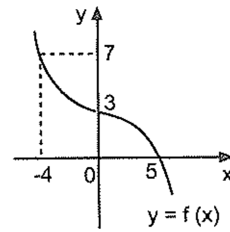
6.



Şekilde f(x) = x ve g(x) fonksiyonlarının grafiği verilmiştir.

Buna göre, $g^{-1}(2) \cdot f(5)$ **çarpımı kaçtır?**

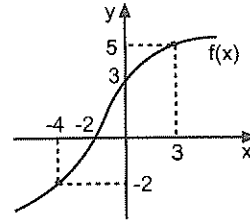
7.



Şekilde f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, $\dfrac{(fof)(5) + f^{-1}(0)}{f(-4)}$ **oranı kaçtır?**

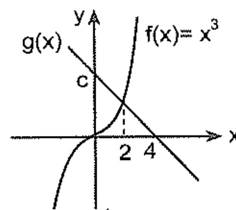
8.



Şekilde f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, $\dfrac{f(f(-2)) + f(3)}{f^{-1}(-2)}$ **oranı kaçtır?**

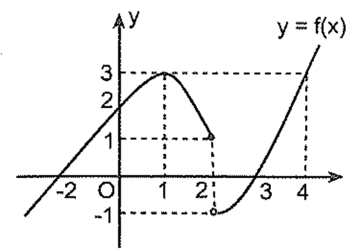
9.



Şekilde $f(x) = x^3$ ve g(x) fonksiyonlarının grafiği verilmiştir.

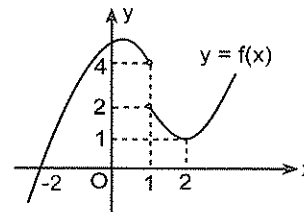
Buna göre, $g(2) + f^{-1}(1)$ **toplamı kaçtır?**

1.



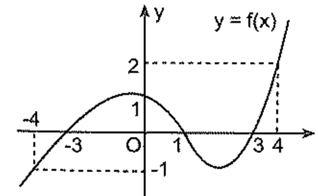
Yukarıda grafiği verilen f fonksiyonuna göre, f(–2) + f(0) + f(2) toplamı kaçtır?

2.



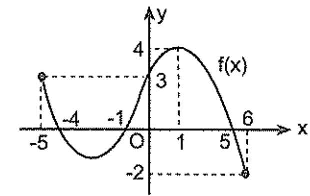
Şekilde grafiği verilen f fonksiyonuna göre, f(–2) + (fof)(2) toplamı kaçtır?

3.



Şekilde verilen f fonksiyonuna göre, $\dfrac{(fofof)(3) + f(4)}{f(-4)}$ **oranı kaçtır?**

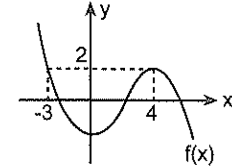
4.



Şekilde [-5, 6] aralığında tanımlı f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, f(x) = 0 eşitliğini sağlayan x değerleri toplamı kaçtır?

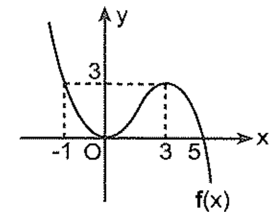
5.



Şekilde f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, f(x) = 2 eşitliğini sağlayan x değerleri çarpımı kaçtır?

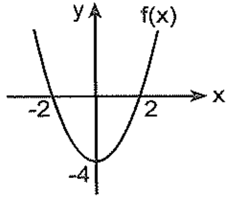
6.



Şekilde f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, f(x) = 2 eşitliğini sağlayan kaç farklı x değeri vardır?

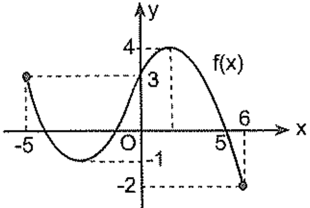
7.



Şekilde f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, $|f(x)| = 3$ eşitliği x in kaç farklı değeri için doğrudur?

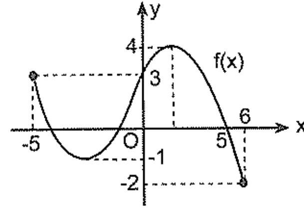
8.



Şekilde [- 5, 6] da tanımlı f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, $|f(x) - 1| = 2$ eşitliği x in kaç farklı değeri için doğrudur?

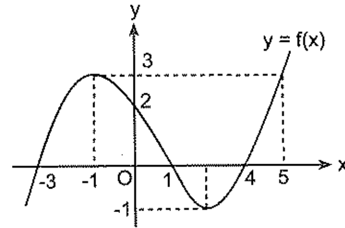
9.



Şekilde [- 5, 6] da tanımlı f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, $||f(x)| + 2| = 2$ eşitliği x in kaç farklı değeri için doğrudur?

10.



Şekilde grafiği verilen f fonksiyonuna göre,

a) **f(x) = 0 eşitliğini sağlayan x değerleri toplamı kaçtır?**

b) **f(x) = 2 eşitliği x in kaç farklı değeri için doğrudur?**

İŞLEM

Acayip basit bir konu...
Bildiğiniz o dört işlem işte. ☺
Meselâ, aranızda toplama, çıkarma, çarpma veya bölme yapamayan var mı?
Eğer dört işlem de sıkıntınız yoksa bu konuyu da yaparsınız. Neyse...
Yine her zaman ki gibi yapayım.
Yani, olayı basitleştirip çoğunuzun anlamayacağı tanımları pas geçeyim.☺

Birden çok aritmetik işlem içeren işlemlere ait kurallar genellikle □, Δ, O, ∗, ...gibi sembollerle ifade edilir. Aslında işlemi, bu sembollerin yüklendiği fonksiyon gibi düşünebilirsiniz.☺.

Örneğin
x Δ y = 3x + 2y + xy olarak verilmiş olsun. Bu işleme göre 2 Δ 4 ün kaç olduğunu bulmak için yapmanız gereken şey çok basit. Öyle değil mi?
x yerine 2, y yerine de 4 yazdığınızda işlem tamamdır. Yazıp 22 bulursunuz artık.☺

İlk sorularda harflerin yerine gelecek değerleri hazır veriyorum. Ama daha sonrakilerde harflerin kaç olması gerektiğini sizin bulmanız gerekebilir.
Ona göre.☺

1. Reel sayılar kümesinde tanımlı Δ işlemi,

$$x \Delta y = 3x + 2y + xy$$

şeklinde tanımlandığına göre, göre, 2 Δ 3 işleminin sonucu kaçtır?

2. Reel sayılar kümesinde,

$$a * b = a^b - b^a$$

işlemi tanımlandığına göre, 2 ∗ 3 işleminin sonucu kaçtır?

3. Reel sayılar kümesinde,

$$a * b = a^2 - b^2$$

işlemi tanımlandığına göre, 12 ∗ 11 işleminin sonucu kaçtır?

4. Reel sayılar kümesinde,

$$a * b = a^2 + b^2 - 2ab$$

işlemi tanımlandığına göre, 10 ∗ 8 işleminin sonucu kaçtır?

5. Pozitif tam sayılar kümesinde,

a ⊗ b = EKOK (a,b)

işlemi tanımlanmıştır.

Buna göre, 15 ⊗ 20 işleminin sonucu kaçtır?

6. Reel sayılar kümesinde tanımlı Δ işlemi,

$$x \Delta y = x + y + xy$$

şeklinde tanımlanıyor.

m Δ 2 = 11 olduğuna göre, m kaçtır?

7. Reel sayılar kümesinde tanımlı Δ işlemi,

$x \square y = 2(x + y) - xy$

şeklinde tanımlanıyor.

5 □ m = 7 olduğuna göre, m kaçtır?

Bir işlem de parantez içinin önceliği olduğunu söylemeye gerek var mı?

8. Reel sayılar kümesinde,

$a \Delta b = a^2 - b^2$

işlemi tanımlandığına göre, (5 Δ 4) Δ 8 işleminin sonucu kaçtır?

9. Reel sayılar kümesinde,

$a \Delta b = a^2 + b^2 + ab$

işlemi tanımlandığına göre, (2 Δ 1) Δ 2 işleminin sonucu kaçtır?

10. Reel sayılar kümesinde tanımlanan Δ işlemi,

$x \Delta y = x + y + xy + 1$

olduğuna göre, (m Δ 1) Δ 3 = 52 eşitliğini sağlayan m değeri kaçtır?

11. Reel sayılar kümesinde tanımlı Δ işlemi,

$x * y = 2x + y - 3$

şeklinde tanımlanıyor.

5 * 3 = 2 * k olduğuna göre, k kaçtır?

12. R – {0} kümesinde tanımlı * işlemi,

$x * y = \frac{x - 5y}{x}$

şeklinde tanımlanıyor.

4 * 2 = a * 3 olduğuna göre, a kaçtır?

13. R de tanımlı Δ işlemi,

$\frac{1}{a * b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

biçiminde tanımlandığına göre, 2 * 4 kaçtır?

14. R de tanımlanan Δ ve * işlemleri,

$x \Delta y = x^2 + y^2 - 2xy$

$x * y = x + y$

olduğuna göre, (5 Δ 2) * (7 Δ 5) işleminin sonucu kaçtır?

1. Reel sayılar kümesi üzerinde

$x * y = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

işlemi tanımlandığına göre, 3 * 2 işleminin sonucu kaçtır?

İşlem içinde EBOB ve EKOK bilgisine ihtiyaç olabilir.

2. Pozitif tam sayılar kümesinde,

$a \otimes b = \text{EKOK}(a, b)$

$a \oplus b = \text{EBOB}(a, b)$

işlemleri tanımlanmıştır.

Buna göre, (24 ⊗ 36) ⊕ 54 işleminin sonucu kaçtır?

3. Tamsayılar kümesi üzerinde Δ işlemi aşağıdaki kuralla tanımlanıyor.

$$x \Delta y = \begin{cases} x + y, & x > y \text{ ise} \\ xy, & x \leq y \text{ ise} \end{cases}$$

Buna göre, (4 Δ 1) Δ 6 işleminin sonucu kaçtır?

4. R de tanımlı Δ işlemi,

$$x \Delta y = \begin{cases} x + y, & x + y > 1 \text{ ise,} \\ 2, & x + y = 1 \text{ ise,} \\ xy, & x + y < 1 \text{ ise,} \end{cases}$$

olarak tanımlandığına göre, $\left[\left(\frac{1}{3} \Delta \frac{2}{3}\right) \Delta 1\right]$ işleminin sonucu kaçtır?

5. R^2 de tanımlanan "Δ" işlemi,

(a, b) Δ (c, d) = (a.c – 1, b + d + 2) olmak üzere,

(2, y) Δ (x, 2) = (11, 8) olduğuna göre, x + y toplamı kaçtır?

6. R^2 de tanımlanan "Δ" işlemi,

(a, b) Δ (c, d) = (a.d + 2, b.c – 1) olmak üzere,

(2, 4) Δ (m, n) = (8, m + 2) olduğuna göre, m.n çarpımı kaçtır?

7. R de tanımlanan Δ ve * işlemleri,

$x \Delta y = x^y$

$x * y = x + y$

olduğuna göre, (3 Δ 2) * (2 Δ 3) işleminin sonucu kaçtır?

8. R de tanımlanan Δ ve * işlemleri,

$x \Delta y = x^y$

$x * y = x + y$

şeklinde tanımlanıyor.

3 Δ (2 * x) = 81 olduğuna göre, x kaçtır?

Bazen harflere kaç vermeniz gerektiğini bulmanız gerekebilir.

Örneğin,

(a – 3) Δ (2b + 1) = a.b + 4

şeklinde tanımlanan Δ işlemine göre, 2 Δ 5 in değerini bulalım.

Burada gidip a ya 2, b ye de 5 vermiyceksiniz tabii ki. a ve b ye öyle değerler verin ki 2 Δ 5 elde edilsin. Bunu da a – 3 = 2 den a = 5 ve 2b + 1 = 5 ten b = 2 vererek sağlayabilirsiniz.
a = 5 ve b = 2 için 2 Δ 5 = 5.2 + 4= 14 imiş.
Anladınız mı şimdi?

9. R – {0} kümesinde tanımlı " ∗ " işlemi

$(a + 2) * (b - 1) = 2ab + 4$

olduğuna göre, 5 ∗ 1 işleminin sonucu kaçtır?

10. R – {0} kümesinde tanımlı " ∗ " işlemi

$\frac{a-1}{2} * \frac{b}{3} = a + b + ab$

olduğuna göre, 2 ∗ 1 işleminin sonucu kaçtır?

11. pozitif gerçek sayılar kümesinde tanımlı " ∗ " işlemi

$\sqrt{x} * y^3 = xy + 1$

olduğuna göre, 2 ∗ 27 işleminin sonucu kaçtır?

12. Reel sayılar kümesinde tanımlı Δ işlemi,

$(x + y) \Delta (x - y) = x \cdot y + 3$

olduğuna göre, 10 Δ 2 işleminin sonucu kaçtır?

13. R de " Δ " ve " ∗ " işlemleri

$a \Delta b = a + b - 2(a * b)$

$a * b = ab + (a \Delta b)$

olarak tanımlandığına göre, 6 ∗ 3 işleminin sonucu kaçtır?

14. R de tanımlı "∗ " işlemi

$a * b = ab + b + a + 1$

olarak tanımlandığına göre, (a – 1) ∗ (b – 1) işleminin eşiti nedir?

15. R de tanımlı "∗ " işlemi

$(a - 1) * b = ab - b + a - 1$

olarak tanımlandığına göre, a ∗ (b – 1) işleminin eşiti nedir?

İşlemin Özellikleri

Eskiden olsaydı birazdan bahsedeceğim özelliklerin bazılarından hiç bahsetmezdim. Ve sizin de böyle özelliklerin varlığından haberiniz olmazdı zaten.☺ Ama artık vermek lazım. En azından hedefi A kalite bir meslek olanlar için.☺

Kapalılık Özelliği

Bir işlemin kapalılık özelliğini A kümesinde bir Δ işlemi için izah edeyim;
Δ işleminin A kümesine göre kapalı olması için A kümesindeki bütün elemanlar için x Δ y işlemlerinin sonucu A kümesinin elemanı olması lâzım.

Birleşme Özelliği

(x Δ y) Δ z = x Δ (y Δ z) oluyorsa Δ işleminin birleşme özelliği var demektir.

Örneğin,
x Δ y = xy + 1 işleminin birleşme özelliği olup olmadığına bakalım.
Birleşme özelliği olması için (x Δ y) Δ z = x Δ (y Δ z) olması lâzım.
Bakalım.
(x Δ y) Δ z = (xy + 1) Δ z = (xy + 1)z + 1
= xyz + z + 1
Bir de x Δ (y Δ z) ye bakalım.
x Δ (y Δ z) = x Δ (yz + 1) = x(yz + 1) +1
= xyz + x + 1
İkisinin de sonucu benziyor. Ama tıpatıp aynı olmadığından bu işlemin birleşme özelliği yoktur.
Ama ben olsam x, y ve z ye 1, 2 ve 3 verip yapardım. Bazı istisnalar dışında hep doğru çıkıyor. Tabii ki gidip hepsine 1 verirseniz avucunuzu yalarsınız☺

Dağılma özelliği

Bu dağılma meselesi her yerde aynıdır. Nasıl dağıttığınız önemli tabii ki.☺ Sağdan mı? Soldan mı?
A kümesindeki bütün x, y, z elemanları için,
x Δ (y ∗ z) = (x Δ y) ∗ (x Δ z) oluyorsa Δ işleminin ∗ işlemi üzerine soldan dağılma özelliği vardır.
(y ∗ z) Δ x = (y Δ x) ∗ (z Δ x) oluyorsa da sağdan.
Hem sağdan hem de soldan dağılma özelliği varsa işlemin de **dağılma özelliği** var demektir.

Biliyorum. Sinir bi şey.
Ama üzgünüm.☹

İsterseniz (çok istediğinizi biliyorum☺)
a ∗ b = a + b + 2
a □ b = ab
işlemlerine göre, ∗ işleminin □ işlemi üzerinde dağılma özelliği olup olmadığına bakın bakalım.
Aşağıda bunun için yer de ayırdım. Yaparsınız artık☺

Değişme Özelliği

x Δ y = y Δ x oluyorsa (yani, x ile y yer değiştiğinde sonuç değişmiyorsa) Δ işleminin değişme özelliği vardır.
Eğer Δ işleminin değişme özelliği varsa x Δ y = y Δ x olduğunu unutmamak lâzım.

Örnek Soru

x Δ y = x + y + xy

işleminin değişme özelliği var mı?

Çözelim☺
Değişme özelliği olup olmadığını anlamak için x yerine y, y yerine de x yazın. Eğer eşitliğin sağ tarafı aynı çıkıyorsa değişme özelliği var demektir.
Peki, yazalım bakalım.
y Δ x = y + x + yx oluyor. Bu da x Δ y = x + y + xy ile aynı olduğundan değişme özelliği varmış demek ki.
Anladınız mı?
Ama korsan bi çözüm isterseniz çaktırmadan şöyle yapabilirsiniz.☺ Genellikle doğru çıkar. Soruyu boş geçmekten iyidir.☺
1 Δ 2 ve 2 Δ 1 i hesaplayın aynı çıkarsa değişme özelliği var demektir.
Mesela üstte 1 Δ 2 = 2 Δ 1 = 5 oluyor.

Birim (Etkisiz) Eleman ve Yutan Eleman

Birim (etkisiz) eleman e harfi ile gösterilir. Diyelim ki bir A kümesinde tanımlı değişme özelliği olan "Δ" işleminin etkisiz elemanı e olsun. Bu durumda

$x\Delta e = e\Delta x = x$ tir.

Bu eşitlikte **e** işlemin **birim (etkisiz) eleman, x** de **yutan elemanıdır.**

Anlayacağınız üzre yutan elemanı bulmak için extra bir işleme gerek yok. Ama her işlemin yutan elemanı olacak diye bir kural da yok.

Mesela, var mı toplama işleminin yutan elemanı? Ya da bölmenin.

N'ber?☺

Örnek Soru

$x\,\Delta\,y = x + y + xy$

işleminin birim elemanı ve yutan elemanı kaçtır?

Çözelim☺

Siz de çözebilirsiniz. Ama ilk soru olduğu için adeti bozmayalım. Ben çözeyim☺

y yerine e yazıp sonucu x e eşitleyin. Bu kadar☺

Bitmedi tabii ki. İşlemleri de doğru yapmak lâzım.

$x\,\Delta\,e = x + e + xe$ dir. Bunu x e eşitleyin.

$x + e + xe = x$ ve buradan da

$e + ex = 0$ ve $e.(1 + x) = 0$ dan $e = 0$ ve $x = -1$

Burayı anladınız mı?

Demek ki birim elemanı 0 ve yutan elemanı – 1 imiş.

Tabii ki birim elemanı bulmanın da korsan yolu var.☺ x yerine sıfır, y yerine de e yazın sıfıra eşitleyin ve e yi bulun. (Eğer x yerine 1 yazarsanız o zaman 1 e eşitlemeniz lâzım.)

Yapayım mı?

$0\,\Delta\,e = 0 + e + 0.e = 0$ dan $e = 0$ oluyor.

Bunda belki gerek olmayabilir ama bazı gıcık sorularda acayip kolaylık sağlıyor.

Ha! Bir de şunu diyeyim. Sıfır verince e yok oluyorsa x e 1 verin.

Sebebi mi?

Boş verin. Dediğimi yapın yeter.☺

Bir Elemanın Tersi

Baştan söyleyeyim de. Sonra unuturum munuturum☺

İşlem sorularında bir elemanın tersini bulacaksanız ilk önce birim elemanı bulmanız lâzım.

Ne alâka?

Sabırlı olun hele. Nedenini şimdi izah etcem.

Bir A kümesinde tanımlı $*$ işleminin etkisiz elemanı e ve herhangi bir x elemanın $*$ işlemine göre tersi x^{-1} olsun diyelim.

Bu işleme göre x in tersini bulurken, ilk önce birim eleman, sonra da $x * x^{-1} = e$ eşitliğinden x in tersi bulunur.

Yani, hangi sayının tersini bulacaksanız x e o değeri vereceksiniz.

Ha!

Bazı uyanık tipler; daha ben "2 nin tersi kaçtır?" demeden " $\frac{1}{2}$ " diye hemencecik söyleyiveriyor ve lafı ağzına tıkıyorlar adamın☺

Iıh... Yamuldun maalesef.☺ deyince de bozuluyorlar.☺

Niye ki sizce?

Birde şunu bilin yeter.☺

Bir işlemin yutan elemanı varsa bu elemanın (yutan elemanın) tersi yoktur. Bulunamaz.

Örnek Soru

$x\,\Delta\,y = x + y + xy$

işlemine göre 5 in tersi kaçtır?

Çözelim☺

Ne demiştim. Bir elemanın tersini bulacaksanız ilk önce birim elemanı bulmanız lâzım.

O halde önce birim elemanı bulalım.

$0\,\Delta\,e = 0 + e + 0.e = 0$ dan $e = 0$ oluyor.

İsterseniz $1\,\Delta\,e = 1 + e + 1.e = 1$ dan $e = 0$ ı yine bulabilirsiniz. Yeter ki bulun da☺

Şimdi 5 in tersini bulabiliriz.

$x\Delta x^{-1} = e$ formülünde x = 5, e = 0 verirsek (bu arada 5 in tersine de t diyelim.)

$5\,\Delta\,t = 0$ dan

$5\,\Delta\,t = 5 + t + 5t = 0$ dan $t = \frac{-5}{6}$ bulunur.

İşlem tablosu verilirse,

Baştan söyleyeyim. Tabloyu siz hazırlamıyorsunuz. Adamlar veriyor☺

Burada yerim kalmadığı için geçiyorum. Ama antrenmanları var. Moralinizi bozmayın.☺

İşlem Özellikleriyle ilgili Sorular

İşlem özellikleri zor değil. Ama yine de dikkat etmek gerek. Özellik işte. Bilmek lâzım.

1. Gerçek sayılarda tanımlı aşağıdaki işlemlerin hangilerinin birleşme özelliği vardır?

I. $x\,\Delta\,y = x + y + 1$

II. $x\,\Delta\,y = xy + 2$

III. $a * b = a + b + ab$

2. Gerçek sayılar kümesinde tanımlı aşağıdaki işlemlerin hangilerinin değişme özelliği vardır?

I. $x\,\Delta\,y = x + y - 2$

II. $x * y = 2x + 3y - 5$

III. $a * b = a + b + 2ab$

IV. $a\,\Delta\,b = 2a + 2b + ab + 2$

V. $a * b = a^2 + b^2 + 2a - 2b$

3. R de tanımlı, değişme özelliği olan " $*$ " işlemi

$a * b = a + b - 5(b * a)$

olarak tanımlandığına göre, 4 $*$ 2 işleminin sonucu kaçtır?

4. R de değişme özelliği olan "Δ" işlemi

$a\,\Delta\,b = 2a + 2b - 3(b\Delta a)$

olarak tanımlandığına göre, 5 Δ 7 işleminin sonucu kaçtır?

5. R de tanımlı,

$x * y = x + (m - 1)y + xy + 2$

işleminin değişme özelliği olduğuna göre, m $*$ 2 işleminin sonucu kaçtır?

6. R de tanımlı,

$x * y = x + y - 4$

işleminin etkisiz elemanı kaçtır?

7. R de tanımlı,

$x * y = x + y - 2xy$

işleminin birim elemanı ve yutan elemanı kaçtır?

8. R de tanımlı,

$x * y = 2x + 2y + xy + 2$

işleminin birim elemanı ve yutan elemanı kaçtır?

9. R de tanımlı,

$a * b = 4(a + b + ab) + 3$

işleminin birim elemanı ve yutan elemanı kaçtır?

10. A = {1, 2, 3, 4, 5} kümesinde

a * b = " a ve b nin küçük olmayanı"

olarak tanımlanan işlemin etkisiz elemanı ve yutan elemanı kaçtır?

11. A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} kümesinde

a * b = " a ve b nin büyük olmayanı"

olarak tanımlanan işlemin etkisiz elemanı ve yutan elemanı kaçtır?

12. R de tanımlı,

$x * y = x + y - 2$

işlemine göre 4 ün tersi kaçtır?

13. R de tanımlı,

$x \Delta y = x + y + 5$

işlemine göre 3 ün tersi kaçtır?

14. R de tanımlı,

$x * y = x + y + 2xy$

işlemine göre, 2 nin tersi kaçtır?

1. R de tanımlı,

$x * y = x + y - 5xy$

işlemine göre, 1 in tersi kaçtır?

2. R de tanımlı, " * " işlemi

$x * y = x + y - 5$ olarak tanımlanıyor.

$2^{-1} * x = 6$ **olduğuna göre, x kaçtır?**

3. R de tanımlı,

$x * y = x + y + 3xy$

işlemine göre, hangi elemanın tersi yoktur?

4. R de tanımlı,

$a * b = 2a + 2b + ab + 2$

işlemine göre, hangi elemanın tersi yoktur?

5, 6, 7, 8, 9, 10 ve 11. soruları aşağıda verilen tabloya göre cevaplayınız.

A = {a, b, c, d, e } kümesinde tanımlanan Δ işleminin tablosu

Δ	a	b	c	d	e
a	c	d	e	a	b
b	d	e	a	b	c
c	e	a	b	c	d
d	a	b	c	d	e
e	b	c	d	e	a

olduğuna göre,

5. **b Δ e işleminin sonucu nedir?**

6. **c Δ (a Δ e) işleminin sonucu nedir?**

7. **Birim (etkisiz) eleman nedir?**

8. **Bu işlem de a, b, c, d ve e nin terslerini bulunuz.**

$a^{-1} =$ $b^{-1} =$ $c^{-1} =$ $d^{-1} =$ $e^{-1} =$

9. a^{23} **ifadesinin eşiti nedir?**

10. b^{-42} **ifadesinin sonucu nedir?**

11. $(b^3 \Delta c^2) \Delta x^{-1} = d$ **olduğuna göre x nedir?**

12. Aşağıdaki tabloyla değişmeli olmayan (G, Δ)grubu verilmiştir. (Örneğin, bu grupta c Δ d = d, d Δ e = f dir.)

Δ	a	b	c	d	e	f
a	b	e	a	f	c	d
b	f	c	b	a	d	e
c	a	b	c	d	e	f
d	e	a	d	c	f	b
e	d	f	e	b	a	c
f	c	d	f	e	b	a

Buna göre, (a Δ d) Δ (x Δ e) = f eşitliğini sağlayan x nedir?

13, 14, 15, 16 ve 17. soruları aşağıdaki tabloya göre cevaplayınız

Aşağıdaki tabloyla A = {1, 2, 3, 4, 5 } kümesinde tanımlı değişmeli (G,*) grubu verilmiştir.

*	1	2	3	4	5
1	5	1	2	3	4
2	1	2	3	4	5
3	2	3	4	5	1
4	3	4	5	1	2
5	4	5	1	2	3

13. (1 * 2) * 4 işleminin sonucu kaçtır?

14. (3 * 5) * (x * 1) = 2 olduğuna göre, x kaçtır?

15. $x^n = \underbrace{x * x * x * \ldots * x}_{n \text{ tane } x}$

olduğuna göre, 4^{17} **kaça eşittir?**

16. $x * (3^4 * 5^3) = 1$ **olduğuna göre, x kaçtır?**

17. $(2 * x^{-1}) * 4^{-1} = 5$ **olduğuna göre, x kaçtır?**

18. A = { a, b, c, d, e } kümesinde aşağıdaki tabloyla değişmeli olan (G,Δ) grubu verilmiştir.

Δ	a	b	c	d	e
a	e	a	b	c	d
b	a	b	c	d	e
c	b	c	d	e	a
d	c	d	e	a	b
e	d	e	a	b	c

Buna göre, $c^{-2} \Delta d^3$ **işleminin sonucu nedir?**

Modüler Aritmetik
Polinomlar

Kendinizi tanıyıp ifade etmek onu inkâr etmekten çok daha kolaydır ve başarırsanız liderlikte ödüllendirilirsiniz.
Warren Bennis

MODÜLER ARİTMETİK

Modüler aritmetik genel olarak iki sayının birbirine bölümünden elde edilen kalanla ilgilenir.

Baştan söyleyeyim. Bölünebilme kurallarında sıkıntısı olanlar lütfen önce bu sıkıntılarını halletsin sonra gelsinler.☺

Modüler aritmetiği daha kolay anlamanız için size küçük bir soru. Sorum şu:

Saate baktınız ki tam10:00. Peki tam tamına 1967 saatlik süre dolduğunda bu saat kaçı gösterir?

Bu soruyu nasıl çözersiniz?

Herhalde oturup 1967 saatin geçmesini beklemezsiniz. Değil mi?

Kafayı çalıştırın bakalım.☺

İlk önce 1967 yi 12 ye bölüp 11 i buldunuz ve saat 10 dan sonra 11 saat sonra saatin 9:00 olduğunu buldunuz değil mi?

Doğru. Ama şunu unutmayın.

Saat sorularında 12 ye (gün sorularında 7 ye) bölerek kalan bulunur.

Ama şuna da dikkat edin. Saat sorularında şıklar 12 den büyükse o zaman 12 ye değil de 24 e bölüp işlem yapmak lâzım. Aklınızda olsun.

1. **Saate tam12:00 iken çalıştırılan bir saat 61 saat sonra kaçı gösterir?**

2. **6 saatte bir ilaç alan bir hasta ilk ilacını sabah 7:00 da aldığına göre, 10. kez ilaç aldığında saat kaçtır?**

3. **Pazartesi gününden 80 gün sonra günlerden hangi gündür?**

4. **Cuma gününden 144 gün önce günlerden hangi gündür?**

5. **Bir asker 4 günde bir (3 gün arayla) nöbet tutmaktadır. İlk nöbetini Perşembe günü tuttuğuna göre, 16. nöbetini hangi gün tutar?**

6. **16 günde bir deneme sınavına giren Ahmet, ilk deneme sınavına Pazar günü girdiğine göre, 11. deneme sınavına hangi gün girer?**

7. Zeynep 4 günde bir matematik dersine çalışmaktadır.
İlk kez Salı günü çalıştığına göre, 19. kez hangi gün çalışır?

8. Bir işletmede her 40 dakikada bir zil çalmaktadır.
İlk zil saat 08:00 da çaldığına göre, 20. kez saat kaçta çalar?

9. Ferzan 4 günde bir matematik, 3 günde bir de Geometri dersine çalışmaktadır.
İlk kez Salı günü iki derse aynı günde çalıştığına göre, 9. kez hangi gün birlikte çalışır?

10. **Dört basamaklı 2486 sayısının 123 kez yan yana yazılmasıyla elde edilen 492 basamaklı 24862486... sayısının soldan 195. rakamı kaçtır?**

11. **ABCDABCDABCD...**
harf dizilişinde baştan 103. harf nedir?

12. KALEMKALEMKALEM...
dizilişinde baştan 74. harf nedir?

13. A, B, C, D, C, B, A, B, C, D, C, B, A, B, C, D, C...
dizilişinde ilk harf A olduğuna göre, 2012. harf nedir?

14. Bir yol boyunca sırasıyla mavi, beyaz, kırmızı, sarı ve yeşil olmak üzere 125 direk dikilecektir.
Buna göre, dikilecek 87. direğin rengi nedir?

Gelelim modülün orijinal tanımına☺
x ve y tam sayı, m pozitif bir tam sayı olmak üzere, x – y farkı m ile tam bölünebiliyorsa, m modülüne göre x denktir y denir.

Bu **x ≡ y (mod m)** şeklinde ifade edilir. Ve bu **x – y** farkının m ile tam bölündüğü anlamına gelir.

Bu da $\frac{x-y}{m} = k$ biçiminde ifade edilebilir.(tabii ki buradaki k tam sayı olacak.)

Örnek Soru

$3 < x < 15$ olmak üzere,

$50 \equiv 5 \pmod{x}$

olduğuna göre, x kaç farklı değer alabilir?

Çözelim.☺

Bu soruyu üstteki mod tanımına göre düşünmeden çözmek biraz zor gibi.☺

$50 \equiv 5 \pmod{x}$ ise 50 – 5 farkı x e tam bölünür. Yani

$\frac{50-5}{x} = \frac{45}{x}$ kesri tam sayıdır.

Dolayısıyla x değeri 45 i tam bölen sayıların hepsi olabilir.

Yani, 1, 3, 5, 9, 15 ve 45 ama sorunun en başında x in 3 ile 15 arasında olduğunu vermişim.

Onun için x değeri 5 **ve** 9 olabilir. Yani, sadece 2 değer alabilir.

1. $x > 1$ olmak üzere,

$21 \equiv 3 \pmod{x}$

olduğuna göre, x kaç farklı değer alabilir?

2. $5 < x < 10$ olmak üzere,

$37 \equiv 5 \pmod{x}$

olduğuna göre, x kaçtır?

3. $1 < x < 14$ olmak üzere,

$2x + 25 \equiv x + 5 \pmod{x}$

olduğuna göre, x in alabileceği değerler toplamı kaçtır?

4. $2 < x < 15$ olmak üzere,

$3x + 43 \equiv x + 3 \pmod{x}$

olduğuna göre, x in alabileceği değerler toplamı kaçtır?

5. $x > 0$ olmak üzere,

$x \cdot (x+1) + 14 \equiv 0 \pmod{x+1}$

olduğuna göre, x kaç farklı değer alabilir?

6. $m > 1$ olmak üzere,

$48 \equiv 0 \pmod{m}$

$72 \equiv 0 \pmod{m}$

olduğuna göre, m nin alabileceği en büyük değer kaçtır?

7. $m > 1$ olmak üzere,

$45 \equiv 5 \pmod m$

$61 \equiv 1 \pmod m$

olduğuna göre, m kaç farklı değer alabilir?

8. $x \equiv 2 \pmod 3$

$x \equiv 2 \pmod 5$

olduğuna göre, iki basamaklı en küçük x doğal sayısı kaçtır?

9. $x \equiv 3 \pmod 4$

$x \equiv 3 \pmod 6$

olduğuna göre, iki basamaklı en büyük x doğal sayısı kaçtır?

10. $x \equiv 2 \pmod 4$

$x \equiv 3 \pmod 5$

olduğuna göre, x in alabileceği iki basamaklı en büyük değer ile en küçük değerin toplamı kaçtır?

Modüler aritmetikle ilgili soruların çözümünde size lâzım olabilecek özellikler:

$a, b, c, d \in Z$ ve $m \in Z^+$ olmak üzere,

$a \equiv b \pmod m$ ve $c \equiv d \pmod m$ için,

$\mathbf{a \pm c \equiv b \pm d \pmod m}$

$\mathbf{a.c \equiv b.d \pmod m}$

Yani, taraf tarafa toplama, çıkarma ve çarpma yapılabilir.

$\mathbf{a \pm x \equiv b \pm x \pmod m}$

$\mathbf{a.x \equiv b.x \pmod m}$

Bunun Türkçesi de; bir denkliğin her iki yanına aynı sayı eklenip çıkarılabilir ve hatta her iki yanı aynı sayı ile çarpılabilir.

En çok kullanacağımız özellik (isterseniz teorem deyin.☺ Siz bilirsiniz.) ise şu:

$\mathbf{a^n \equiv b^n \pmod m}$

Yani, bir denkliğin her iki yanının aynı dereceden kuvveti alınabilir.
Özellikler bu kadarcık.☺

11. $0 < a < 5$ olmak üzere,

$x \equiv 2 \pmod 5$

$x^3 \equiv a \pmod 5$

olduğuna göre, a kaçtır?

12. $0 < A < 7$ olmak üzere,

$x \equiv 2 \pmod 7$

$y \equiv 1 \pmod 7$

$3x + 4y \equiv A \pmod 7$

olduğuna göre, A kaçtır?

Örnek Soru

$3^{103} \equiv x \pmod{10}$

olduğuna göre, x in en küçük pozitif değeri kaçtır?

Çözelim☺

Bu tür soruların çözümünde verilen sayının (Tabandaki sayının, burada 3 tür.☺) üslerinin (mod 10) daki değerlerini hiç sıkılmadan sırayla bulun. Zaten bir süre sonra denkliğin sağ tarafındaki sayıların tekrar etmeye başladığını göreceksiniz. Üs almayı o zaman bırakırsınız.☺ Gerçi ben bir şeyi net olarak görün diye devam etcem ama siz devam etmeseniz de olur.

Dediğim şey şu:

$3^1 \equiv 3 \pmod{10}$

$3^2 \equiv 9 \pmod{10}$

$3^3 \equiv 7 \pmod{10}$

$3^4 \equiv 1 \pmod{10}$

$3^5 \equiv 3 \pmod{10}$

$3^6 \equiv 9 \pmod{10}$

$3^7 \equiv 7 \pmod{10}$

$3^8 \equiv 1 \pmod{10}$

$3^9 \equiv 3 \pmod{10}$

⋮

Dikkatinizi çekmiş olması lâzım.?
Denkliğin sağ tarafındaki sayıları üstten aşağı hızlıca okuyun bakalım.

3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, 3, ...

Dört adımdan sonra papağan gibi tekrar etmeye başlıyorsunuz değil mi? (4 lü paketler halinde hep aynı şey oluyor.)
Artık şunu görürsünüz☺ Eğer üs,
4 ün katıysa (4,8, 12,...) sonuç 1 çıkacak,
4 ün katından 1 fazlaysa (1, 5, 9,..) sonuç 3,
4 ün katından 2 fazlaysa (2, 6, 10,..) sonuç 9,
4 ün katından 3 fazlaysa (3, 7, 11, ..) sonuç 7 oluyor.
Benim sorduğum soruda üs kaç? 103.
Peki, bu hangisine uyuyor? Bunu 4 e bölün ve kalanına bakın bakalım.
Kalan 3 değil mi? O halde cevap kaç?
7 değil mi?
Evet. Demek ki x değeri 7 imiş.
Olayın özeti şu:
Üslü mod sorularını çözerken sayının üslerini alın ve genel kuralı bulun. Genel kuralı bulduktan sonrası kolay zaten.☺ Sizden istenen hangisine uyuyor. Ona bakın.

1. $2^{62} \equiv x \pmod 5$

olduğuna göre, x kaçtır?

2. $4^{100} \equiv x \pmod 9$

olduğuna göre, x kaçtır?

3. $3^{2012} \equiv x \pmod{10}$

olduğuna göre, x kaçtır?

4. $3^{47} \equiv x \pmod 5$

olduğuna göre, x kaçtır?

5. $3^{55} \equiv x \pmod 8$

olduğuna göre, x kaçtır?

6. $2^{35} \equiv x \pmod 9$

olduğuna göre, x kaçtır?

7. $4^{85} \equiv x \pmod{10}$

olduğuna göre, x kaçtır?

8. $2^{1453} \equiv x \pmod{10}$

olduğuna göre, x kaçtır?

9. $7^{101} \equiv x \pmod 9$

olduğuna göre, x kaçtır?

Bazen kuralı bulmanız çok daha kısa sürebilir.

1. $6^{782} \equiv x \pmod{10}$

olduğuna göre, x kaçtır?

2. $5^{111} \equiv x \pmod{10}$

olduğuna göre, x kaçtır?

Eğer sağ tarafta sıfıra ulaşırsanız sonuç direkt sıfır. Sağ tarafın sıfır çıkması verilen üslü sayının o mod değerindeki sayıya tam bölündüğü anlamına gelir.

3. $4^{254} \equiv x \pmod 8$

olduğuna göre, x kaçtır?

4. $6^{17} \equiv x \pmod{54}$

olduğuna göre, x kaçtır?

5. $12^{21} \equiv x \pmod{18}$

olduğuna göre, x kaçtır?

Bazen üslü sayılar birden fazla olabilir. Her birini tek tek hesaplayıp öyle işlem yapmak lâzım.

6. $2^{22} + 3^{15} \equiv x \pmod 5$

olduğuna göre, x kaçtır?

7. $4^{77} \cdot 3^{27} \equiv x \pmod{10}$

olduğuna göre, x kaçtır?

8. $3^{15} + 7^{25} \equiv x \pmod{10}$

olduğuna göre, x kaçtır?

9. $2^{35} \cdot 3^{122} \equiv x \pmod{10}$

olduğuna göre, x kaçtır?

10. $2^{14} + 3^{15} \cdot 6^{16}$

sayısının 5 e bölümünden kalan kaçtır?

" 3^{45}, 2^{54} gibi bilmem hangi üslü sayının 4 e, 5 e, 9 a, .. bölümünden kalan kaçtır?" gibi rastlayacağınız sorular da modüler aritmetikle ilgilidir. Bilginiz olsun. Bu tür sorulardaki temel mantık şudur:
Eğer, x in m ye bölümünden kalan y ise bu durum $x \equiv y \pmod{m}$ biçiminde ifade edilebilir.
İşte üstteki olay bununla ilgili.☺

11. 3^{54} **ün 5 e bölümünden kalan kaçtır?**

12. 2^{63} **ün 5 e bölümünden kalan kaçtır?**

13. 2^{123} **ün 7 ile bölümünden kalan kaçtır?**

Bir sayının birler basamağı o sayının 10 a bölümünden kalandır. Başka bir ifadeyle de (mod 10) daki değeridir.

14. 7^{2013} **ün birler basamağındaki rakam kaçtır?**

Eğer taban, üslerini kolayca bulamayacağınız kadar büyükçe bir sayı olursa tabanın verilen mod taki en küçük pozitif değerini alın ve öyle işlem yapın.

1. 13^{45} **in 5 e bölümünden kalan kaçtır?**

2. $(101)^{203} \equiv x \pmod{9}$

olduğuna göre, x kaçtır?

3. 2013^{2012}

sayısının birler basamağındaki rakam kaçtır?

4. $(44)^{55} + (55)^{66} + (66)^{77}$

toplamının birler basamağındaki rakam kaçtır?

5. x sayısının rakamlarının toplamı 38 olduğuna göre, x^3 **ün 9 ile bölümünden kalan kaçtır?**

6. A sayısının rakamlarının toplamı 104 olduğuna göre, A^{25} **in 9 ile bölümünden kalan kaçtır?**

7. $x = 1! + 2! + \ldots + 2012!$

olduğuna göre, x^{10} **un 10 a bölümünden kalan kaçtır?**

Şu sorularda n pozitif tam sayı olduktan sonra kaç olduğunun önemi var mı sizce? Bakın bakalım.

8. n pozitif tam sayı olmak üzere,

$3^{4n+43} \equiv x \pmod{5}$

olduğuna göre, x kaçtır?

9. n pozitif tam sayı ve

$2^{4n+99} \equiv x \pmod 5$

olduğuna göre, x kaçtır?

10. n pozitif tam sayı olmak üzere,

$(101)^{6n+16} \equiv x \pmod 9$

olduğuna göre, x kaçtır?

İşte size genel bir kural bulununca daha rahat çözülen birkaç soru. Gerçi ilk üçü biraz basit. Ama siz yine de genel kuralını bulup çözün.☺

11. $3^x \equiv 2 \pmod 5$

olduğuna göre, x in en küçük doğal sayı değeri kaçtır?

12. $11^x \equiv 5 \pmod 9$

olduğuna göre, x in en küçük doğal sayı değeri kaçtır?

13. $3^x \equiv 2 \pmod 5$

$2^y \equiv 7 \pmod 9$

olduğuna göre, x in en küçük doğal sayı değeri ile y nin en küçük doğal sayı değeri toplamı kaçtır?

14. x > 15 olmak üzere,

$3^x \equiv 4 \pmod 5$

olduğuna göre, x en az kaçtır?

15. x iki basamaklı doğal sayı ve

$53^x \equiv 1 \pmod 7$

olduğuna göre, x en az kaçtır?

16. x < 30 olmak üzere,

$(20)^x \equiv 4 \pmod 9$

olduğuna göre, x en çok kaçtır?

Denklik Sınıfı (Kalan Sınıfları)

Şöyle bir soruyla başlayayım.
Bir tam sayının 7 ile bölümünden elde edilen olası kalan kaç olabilir?
Çok basit.☺ 0, 1, 2, 3, 4, 5, veya 6. Öyle değil mi?
İşte bu $Z/7 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$ şeklinde ifade ediliyor.
Aynı şekilde tam sayılar 5 e bölündüğünde kalan 0, 1, 2, 3 veya 4 olabilir. Bu da $Z/5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ şeklinde ifade edilir.

Biliyorum. Rakamların üstündeki çizgileri merak ediyorsunuz. Onu da izah edeyim.
Ama önce şu soruma cevap verin bakalım.
Bir sayının 5 e bölümünden kalan 4 ise bu sayı kaç olabilir?
{..., 4, 9, 14, 19, ...} (Bir sürü sayı var gördüğünüz gibi☺) işte bu bir sürü sayıyı temsilen hepsinin yerine $\bar{4}$ kullanılır ve buna **4 ün denklik sınıfı** denir.
Yani, Z / 5 te $\bar{4} = \{..., 4, 9, 14, 19, ...\}$ demektir.
Aynı şekilde Z / 5 te 1 in denklik sınıfı (yani, 5 e bölündüğünde bir kalanını veren sayıların kümesi)
$\bar{1} = \{..., 1, 6, 11, 16, ...\}$ dır.

Ve bir de şunları bilmeniz lâzım☺
Z / m de ki işlemler (mod m) ye göre yapılır. Ve Bir sayıya mod değerinin katları eklenip çıkarılabilir. Denklik sınıfı değişmez.

Örneğin,
Z / 5 te, – 2 ve $\frac{2}{3}$ ün denklik sınıflarını bulalım.
$-2 \equiv -2 + 5 \equiv 3$ tür. (5 in katlarını ekleyip pozitif yaptım.)

Kesirli olursa mod değerinin katlarını sadece payına sonuç tam sayı çıkıncaya kadar eklemeniz yeterli.
Yani, $\frac{2}{3} \equiv \frac{2+5}{3} \equiv \frac{2+5+5}{3} \equiv 4$ tür.

Burada başka bir yol da paydayı mod değerine göre 1 olacak şekilde genişletmek.
Onu da görün. $\underset{(2)}{\frac{2}{3}} \equiv \frac{4}{6} \equiv \frac{4}{1} \equiv 4$
Hangisi kolayınıza geliyorsa onu kullanırsınız artık.

Denklem çözümü

Buradaki denklemlerin çözümü birinci derecen bir bilinmeyenli denklem çözümüne benziyor. Ama bunların bazı koşulları var tabii ki.

Örnek üzerinde göstereyim.

Örnek Soru

$2x \equiv 1 \pmod 5$

olduğuna göre, x in en küçük doğal sayı değeri kaçtır?

Çözelim☺
1.yol şu:
mod 5 teki 0, 1,2, 3 ve 4 için tek tek bakın bakalım hangisinde $2x \equiv 1$ oluyor. x = 3 için. Öyle değil mi?
x = 3 için $2x = 6 \equiv 1 \pmod 5$ olduğundan x in en küçük pozitif değeri 3 tür.

Aslında bu tür denklemleri farklı yollarla çözebiliyorum.☺ Size tavsiyem şu:
Denklemi normal denklem çözer gibi çözün ve x i bulun. Muhtemelen pozitif tam sayı çıkmayacak.
İlk önce 2x = 1 den $x = \frac{1}{2}$ yi bulun.
Ama (mod 5) te böyle bir değer olamayacağından bunu pozitif tam sayı yapmanız lâzım. Bunun için payına 5 ekleyin ve $x = \frac{1+5}{2} = 3$ ü bulun.

2. yol ise şuydu
Payda mod 5 te 1 e denk olacak şekilde kesri genişleterek $x = \underset{(3)}{\frac{1}{2}} \equiv \frac{3}{6} \equiv \frac{3}{1} \equiv 3$ bulun.
Bu soruda x in en küçük pozitif tam sayı değerini sorduğum için cevabınız 3 olacak. Ama x in en küçük pozitif iki değerinin toplamını sorabilirdim. Veya x in en büyük negatif tam sayı değerini sorabilirdim. Ama hepsinde de yapmanız gereken aynı şeydi. Yani, önce x in denklik sınıfını bulmak. Sonra da ne isteniyorsa onu bulmak.

Bu arada x sadece 3 olabilir demek değil, 3 ün denklik sınıfındaki her değer olabilir demektir.
Yani, x = ... – 2, 3, 8, 13, ... olabilir.
Anladınız mı?
x e modu yani, 5 i ekleyip çıkararak diğer değerleri de bulabiliyorum.

1. $2x \equiv 3 \pmod 5$

olduğuna göre, x in en küçük doğal sayı değeri kaçtır?

2. $3x \equiv 5 \pmod 7$

olduğuna göre, x in en büyük negatif tam sayı değeri kaçtır?

3. $5x + 2 \equiv 6 \pmod 7$

olduğuna göre, x in en küçük doğal sayı değeri kaçtır?

4. $4x + 1 \equiv 4 \pmod 5$

olduğuna göre, x in alabileceği en küçük iki pozitif tam sayının toplamı kaçtır?

5. $3x + 1 \equiv 3 \pmod 5$

olduğuna göre, x in alabileceği en büyük negatif tam sayı ile en küçük pozitif tam sayının toplamı kaçtır?

6. $3x + 2 \equiv 1 \pmod 7$

denkliğini sağlayan en küçük pozitif iki değerin toplamı kaçtır?

7. x > 40 olmak üzere,

$$5x + 3 \equiv 4 \pmod 6$$

denkliğini sağlayan en küçük x değeri kaçtır?

8. x ve y pozitif tam sayıları için

$$3x + 1 \equiv 3 \pmod 5$$

$$4y + 2 \equiv 5 \pmod 7$$

olduğuna göre, x + y toplamı en az kaçtır?

1. Z / 5 kümesinde aşağıdaki ifadelerin denklik sınıfını (kalan sınıfını) bulunuz.

a) 37

b) −42

c) $\frac{3}{4}$

d) 3^{43}

2. Z / 5 kümesinde aşağıdaki işlemlerin sonucunu bulunuz.

a) $\overline{3} \otimes \overline{4}$

b) $\overline{3} \oplus \overline{2}$

c) $\overline{4} \otimes (\overline{3} \oplus \overline{4})$

d) $(\overline{4} \oplus \overline{4}) \otimes \overline{3}$

3. Z / 7 de,

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{3}$$

toplamının sonucu kaçtır?

4. Z / 7 kümesi için

$$\left[(\overline{4} \oplus \overline{5}) \otimes \overline{4}\right] \otimes \left[\overline{3} \otimes (\overline{6} \oplus \overline{5})\right] = \overline{3} \otimes \overline{x}$$

olduğuna göre, x kaçtır?

5. Z / 5 te,

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{58}$$

ifadesinin denklik sınıfı nedir?

6. Z / 5 kümesinde

$$(\overline{3}x + \overline{2}) \otimes (\overline{4}x + \overline{3})$$

ifadesinin eşiti nedir?

7. Z / 6 da,

$(\overline{3}x+\overline{4})(\overline{5}x+\overline{3})$

ifadesinin eşiti nedir?

8. Z / 7 de,

$f(x)=\overline{4}x+\overline{5}$

olduğuna göre, $f^{-1}(4)$ **kaçtır?**

9. Z / 8 de,

$f(\overline{3}x+\overline{1})=\overline{5}x+\overline{2}$

olduğuna göre, $f(\overline{3})$ **kaçtır?**

10. Z / 6 da,

$f(x)=5x+4$

olduğuna göre, $(f\,of)(\overline{5})$ **kaçtır?**

11. Z / 5 te,

$f(x)=4x+3$

olduğuna göre, $(f\,of)(x)$ **nedir?**

12. Z / 5 kümesinde

$(3x+2)\cdot(4x-1)=0$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

13. Z / 7 de,

$(3x^2+4x)=0$

denklemini sağlayan en küçük pozitif iki değerin toplamı kaçtır?

POLİNOMLAR

Zor olmayan konulardan biri daha...
Matematiği belli bir mantık çerçevesinde öğrenirseniz (ya da size öğretilirse) her konuyu rahatlıkla öğrenebilirsiniz. Onun için işin mantığını çözmeniz gerektiğinin farkında olmanız lâzım.☺

Polinomla ilgili bazı şeyleri şu polinom üzerinde izah edeyim.
$P(x)=2x^5+3x^3-4x^2-5x+4$ polinomunda
Beş terim vardır.
Kat sayılar: 2, 3, – 4, – 5 ve 4 tür.
Polinomun derecesi (Yani, en büyük üs) $d[P(x)]=5$
Baş kat sayı (En büyük dereceli terimin kat sayısı) ise 2 tir.
Sabit terim (x değişkeni olmayan terim) ise 4 tür.

Bir de şunu unutmayın☺
Bir ifadenin polinom belirtmesi için x in üsleri doğal sayı olmalı ve kesirli mesirli sadeleşmeyen şeyler de olmamalı.

1. Aşağıdaki ifadelerin hangileri polinomdur?

I. $P(x)=x^2+x-1$

II. $P(x)=3x^3+2x$

III. $P(x)=\sqrt{2}x^2+x^{-1}-1$

IV. $P(x)=0$

V. $P(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x+1}$

VI. $P(x)=\dfrac{x^2+3x+5}{5}$

VII. $P(x)=\sqrt{x^3+1}$

VIII. $P(x)=x+\dfrac{1}{x^2}$

IX. $P(x)=2\sqrt{x}+1$

2. $P(x)=3x^2+4x-1$ polinomunun

a) Kaç terimi vardır?
b) Baş katsayısı kaçtır?
c) Sabit terimi kaçtır?
d) Kat sayılar toplamı kaçtır?
e) Derecesi kaçtır?

3. $P(x)=8x^5+5x^3+2x+100$ polinomunun

a) Kaç terimi vardır?
b) Baş katsayısı kaçtır?
c) Sabit terimi kaçtır?
d) Katsayılar toplamı kaçtır?
e) Derecesi kaçtır?

4. $P(x)=7\sqrt{2}x^{10}+-5x^9+2x-100$ polinomunun

a) Kaç terimi vardır?
b) Baş katsayısı kaçtır?
c) Sabit terimi kaçtır?
d) Katsayılar toplamı kaçtır?
e) Derecesi kaçtır?

5. $P(x) = (m-4)x^3 + 5x^2 + 2$
polinomunun baş kat sayısı 2 olduğuna göre, m kaçtır?

6. $P(x) = -4x^3 + 5x^2 + 2x + 3k - 2$
polinomunun sabit terimi 10 olduğuna göre, k kaçtır?

7. $P(x) = (2n+3)x^{n-1} + 5x^2 - 9$
polinomunun derecesi 3 olduğuna göre, baş kat sayısı kaçtır?

8. $P(x) = x^{3n-1} - 4x + n^2 + 2n + 1$
polinomunun derecesi 5 olduğuna göre, sabit terimi kaçtır?

Sabit polinomda sabit terim dışındaki kat sayılar sıfırdır. Sıfır polinomunda ise kat sayıların hepsi sıfıra eşit olması lâzım.

9. P(x) sabit polinomdur.
$P(x) = (a-2)x^3 + (b+1)x^2 + (c-1)x + 11$
olduğuna göre, a + b + c toplamı kaçtır?

10. P(x) sabit polinom olmak üzere,
$P(x) = (a+3)x^2 + (b-1)x + ab + 2$
olduğuna göre, P(1) kaçtır?

11. P(x) sıfır polinomu olmak üzere,
$P(x) = (a-3)x^3 + (b+2)x^2 + c - 1$
olduğuna göre, a + b + c toplamı kaçtır?

12. P(x) sıfır polinomu olmak üzere,
$P(x) = (m+1)x^3 + (n-5)x^2 + kx - b - 2$
ifadesi sıfır polinom olduğuna göre, mn – kb farkı kaçtır?

Her polinom bir fonksiyondur aynı zamanda.
Dolayısıyla bazı polinom sorularını çözmek için birazcık fonksiyon bilgisi lâzım. Ona göre.☺

Örnek Soru
$P(x) = x^3 - 3x + 4$
olduğuna göre, P(1) + P(–2) toplamı kaçtır?

Çözelim☺
Fonksiyondan farkı yok. Hatırlayın. Fonksiyonlardaki gibi yapalım. Ve x e değer vererek istenilen ifadeleri elde edelim.
x = 1 için $P(1) = 1^3 - 3.1 + 4 = 2$ ve
x = – 2 için $P(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 4 = 2$ yi bulursunuz herhalde. Sonra da toplayın bunları ve sonucu bulun.
Fonksiyondan bi farkı yok di mi?

Örnek Soru
P(x) polinomu için,
$(x-1) \cdot P(x) = x^2 + mx - 5$
olduğuna göre, P(2) kaçtır?

Çözelim.☺
Herhangi bir soruyu çözerken ilk olarak soruyu anlayın. Sonra da sizden istenen ifadeyi nasıl elde edebileceğinizi düşünün. Bu soruda neyi istemişim☺ P(2) yi. O halde x e 2 verin bakalım.
$(2-1) \cdot P(2) = 2^2 + m.2 - 5$
$P(2) = 2m - 1$
Ama m yi bilmiyoruz. Peki, nasıl bulcaz m yi?
Şu söyleyeceğim şey çok önemli. **Polinomlarda x e değer verirken genellikle çarpım halindeki ifadeyi sıfır yapan değer verilir.** Çoğu zaman işe yarar. Göreceksiniz. ☺
Yukarıdaki eşitlikte x e 1 verin bakalım.
$0.P(1) = 1 + m - 5$
$0 = m - 4$ ten $m = 4$ bulunuyor.
Gerisi belli zaten. m yerine 4 yazarsanız. P(2) = 7 bulursunuz.

1. $P(x) = x^3 + 3x^2 + 2$
olduğuna göre, P(2) kaçtır?

2. $P(x) = x^3 + mx - 10$ veriliyor.
P(2) = 6 olduğuna göre, m kaçtır?

3. $P(x) = ax^2 + 4b - 1$ veriliyor.
P(2) = 7 olduğuna göre, a + b toplamı kaçtır?

4. $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
olduğuna göre, P(6) kaçtır?

5. $P(x-2) = x^3 - 4x + 2$
olduğuna göre, P(1) kaçtır?

6. $P(2x-1)=x^4-10x+8$

olduğuna göre, P(3) kaçtır?

7. $P(x)=5x-2$

olduğuna göre, P(2x + 1) in eşiti nedir?

8. $P(x)=x^2-2x$

olduğuna göre, P(x + 1) in eşiti nedir?

9. $P(x-1)=x^2+x$

olduğuna göre, P(x) in eşiti nedir?

10. $P(2x-1)=4x^2+6x$

olduğuna göre, P(x) in eşiti nedir?

11. $P(x)=(x-2)Q(x)+4x+2$

olduğuna göre, P(2) kaçtır?

12. $P(x)=\left(x^3-8\right)B(x)+x^2+2x-3$

olduğuna göre, P(2) kaçtır?

13. P(x) = (x + 1)Q(x – 1) + 6x – 4 veriliyor

Q(1) = 2 olduğuna göre, P(2) kaçtır?

Bir Polinomun Sabit Terimi ve Kat sayılar Toplamının Bulunması

Bunu size $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ polinomunu ele alarak anlatayım.
Bu polinomda kat sayılar toplamı a + b + c + d dir.
Bunda problem var mı?
Peki, x e "1" verirseniz neyi elde edeceğinizi de görün bi.
P(1) = a + b + c + d değil mi? Yani P(x) in kat sayılar toplamı.
Demek ki x e 1 verdiğiniz zaman kat sayılar toplamını buluyormuşsunuz☺
O halde buradan şöyle bir sonuç çıkarabilirsiniz.
Polinomda x yerine 1 yazınca polinomun kat sayılar toplamı bulunur.

Örneğin

P(x) in kat sayılar toplamı x = 1 için P(1) e
P(x + 2) polinomunun ki P(3) e
P(2x – 4) polinomunun ki ise P(– 2) ye eşit olur.
Dikkat ettiyseniz kat sayılar toplamını bulurken P(1) i elde etmeye çalışmıyoruz. Hangi polinomun kat sayıları toplamı sorulmuşsa o polinomda x = 1 veriyoruz.
Anlaşıldı mı?

Gelelim sabit terimin nasıl bulunacağına.
Yukarıdaki polinomda P(x) in sabit terimi d dir.
Aynı şekilde x = 0 için P(0) = d dir. Yani, sabit terim.
Öyle değil mi? O halde şöyle diyebiliriz.
Bir polinomun sabit terimi bulunurken o polinomda x yerine sıfır "0" yazılır.

Örneğin,

P(x) polinomunun sabit terimi x = 0 için P(0) a
P(x + 2) polinomunun ki P(2) ye
P(2x – 1) polinomunun ki ise P(– 1) e eşit olur.
Dikkat ettiniz mi?
Sabit terimi bulurken P(0) ı elde etmeye çalışmıyor, sadece x e sıfır "0" veriyoruz.
Bu önemli işte.

Örnek Soru

$P(x+2)=x^3-4x+2$ veriliyor.
Buna göre, P(x – 1) polinomunun kat sayılar toplamı kaçtır?

Çözelim☺
İlk önce bizden ne isteniyor. Onu görelim. P(x – 1) in kat sayılar toplamı.
Peki, kat sayılar toplamını nasıl buluyorduk?
İstenen polinomda x e 1 vererek. Öyle değil mi?
Yani, sorulan x = 1 için P(1 – 1) = P(0) mış demek ki.
O halde P(0) ı bulcaz.
Nerede? İlk verilen polinom da tabii ki.
Bulalım. P(x + 2) polinomunda P(0) ı elde etmek için x e – 2 vermek lâzım.
P(x + 2) polinomunda x = – 2 için P(0) = 2 olur.

Şunu da unutmayın. Polinom sorularında x e değer verirken daima soruda sizden ne istenmişse onu elde edecek şekilde değer verin. Emin olun ki işe yarayacak bir şeyler bulacaksınız.☺

1. $P(x)=x^2+3x-1$

olduğuna göre, P(x) polinomunun sabit terimi kaçtır?

2. $P(x)=x^3+3x^2+2$

olduğuna göre, P(x + 1) polinomunun sabit terimi kaçtır?

3. $P(2x-1)=2x^2+5x-7$

olduğuna göre, P(x – 3) polinomunun sabit terimi kaçtır?

4. $P(2x)=x^3+3x^2-ax-2$

olduğuna göre, P(x + 2) polinomunun sabit terimi 5 olduğuna göre a kaçtır?

5. $P(x-1)=x^3-5x+2$

olduğuna göre, P(x) polinomunun kat sayılar toplamı kaçtır?

6. $P(x)=x^2-5x-6$

olduğuna göre, P(x + 5) polinomunun kat sayılar toplamı kaçtır?

7. $P(x-1)=x^3+5x-7$

olduğuna göre, P(2x – 1) polinomunun kat sayılar toplamı kaçtır?

8. $P(x-2)=x^3-ax-a+2$ veriliyor.

P(x + 1) polinomunun kat sayılar toplamı 6 olduğuna göre, a kaçtır?

9. **P(x + 1) polinomunun kat sayılar toplamı 5 olduğuna göre, $P(x^2+2)$ polinomunun sabit terimi kaçtır?**

10. $P(x+1)=(x^2+x-1).Q(x-1)+3x-2$ veriliyor.

Q(x) polinomunun katsayılar toplamı – 5 olduğuna göre, P(2x + 1) polinomunun kat sayılar toplamı kaçtır?

11. $P(3x)=(x^3+x+2)Q(x+5)-x+2$ veriliyor

P(x) polinomunun sabit terimi 6 olduğuna göre, Q(2x + 3) polinomunun katsayılar toplamı kaçtır?

Polinomlarda İşlemler

İki ya da daha fazla polinomu toplarken (veya çıkarırken) benzer terimleri (aynı dereceli terimleri) kendi aralarında toplayın (veya çıkarın.)
Bir örnekle anlaşılacak kadar basit bir şey.

Örneğin,

$P(x)=2x^3-5x^2+2x+1$

$Q(x)=3x^3+x^2-4$

polinomları için P(x) + Q(x) toplamını bulalım.

$P(x)+Q(x)=2x^3-5x^2+2x+1+3x^3+x^2-4$

$=5x^3-4x^2+2x-3$

Bi zorluğu yok gördüğünüz gibi.

1. $P(x)=2x^3+3x^2-4x+1$

$Q(x)=-x^3+2x^2-3x+14$

olduğuna göre, P(x) + Q(x) toplamının eşiti nedir?

2. $P(x)=x^5-4x^3+x$

$Q(x)=-x^3+2x^2+4$

olduğuna göre, P(x) + Q(x) toplamı nedir?

3. $P(x)=2x^2-2x^4+x+2$

$Q(x)=-x^4+2x^2+2x+7$

olduğuna göre, P(x) – Q (x) farkı nedir?

4. $P(x)=7x^5+4x^7-1$

$Q(x)=-x^7+3x^5-3x-5$

olduğuna göre, P(x) – Q (x) farkı nedir?

Çarpma

Buradaki çarpma tam bir amele işi☺
Pratik yolu yok bunun.
İki polinomu çarparken, birinci polinomun her bir terimini ikinci polinomun her bir terimiyle tek tek çarpıyor ve bu çarpım sonucunda elde edilen benzer (aynı dereceli) terimleri topluyoruz.
Ne demek istediğimi ameleliği fazla olmayan bir örnekle izah edeyim☺

Örnek Soru

$P(x)=2x^2+3$

$Q(x)=x^3-2$

olduğuna göre, P(x).Q(x) çarpımı nedir?

Çözelim:☺

Dağılma özelliğini kullanarak tek tek çarpcaz. Başka yolu yok.

$P(x)\cdot Q(x)=(2x^2+3)\cdot(x^3-2)$

$=2x^5+3x^3-4x^2-6$

Olay bu yani.

Peki, iki polinomun çarpımından elde edilen polinomun derecesi nasıl hesaplanır?
Bu tabanları aynı olan iki üslü ifadenin çarpımına benziyor.
Meselâ üstteki örnek soruda P(x) in derecesi 2, Q(x) in derecesi ise 3 idi. Ama P(x).Q(x) çarpımının derecesi 5 oldu. Dereceler toplandı kısacası.

5. $P(x)=2x+1$

$Q(x)=3x+1$

olduğuna göre, P(x).Q(x) çarpımının eşiti nedir?

6. $P(x) = x^2 + x$

$Q(x) = x^2 - 1$

olduğuna göre, P(x) .Q(x) çarpımının eşiti nedir?

7. $P(x) = x^2 - 3x$

$Q(x) = 2x + 7$

olduğuna göre, P(x) .Q(x) in eşiti nedir?

8. $P(x) = x^2 + x + 1$

$Q(x) = x + 1$

olduğuna göre, P(x) .Q(x) in eşiti nedir?

9. $P(x) = 3x^2 + 2x - 4$

$Q(x) = -2x^2 + 3x - 1$

olduğuna göre, P(x) .Q(x) çarpımındaki x^2 li terimin katsayısı kaçtır?

10. $P(x) = 3x^4 + 5x^2 - 2x + 1$

$Q(x) = -3x^3 + 2x^2 - 5x + 2$

olduğuna göre, P(x) .Q(x) çarpımındaki x^4 lü terimin kat sayısı kaçtır?

11. $P(x) = 3x^3 - 4x + 2$

$Q(x) = -2x^2 + x + 1$

olduğuna göre, 2P(x) .[3Q(x) + 2] polinomunun baş kat sayısı kaçtır?

12. $der[P(x)] = 3$

$der[Q(x)] = 4$

olduğuna göre, P(x) .Q(x) polinomunun derecesi kaçtır?

13. $der[P(x)] = 4$

olduğuna göre, $der\left[x^2 \cdot P\left(x^3\right)\right]$ kaçtır?

İki Polinomun Eşitliği

Çok basit.
İki polinomun eşit olması için ikisindeki aynı dereceli terimlerin kat sayıları eşit olması lâzım.
Yalnız her zaman hazır iki polinom verilmiyor işte☺
Ama genel olarak,

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$Q(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$

polinomları eşit ise, yani, P(x) = Q(x) ise a = p, b = q, c = r, d = s dir.
Anladınız mı bu olayı?

Örnek Soru

$P(x) = (a+b)x^2 + cx + 4$

$Q(x) = 8x^2 + 3x + a - 2$

polinomları için P(x) = Q(x) ise b + c toplamı kaçtır?

Çözelim☺
P(x) ile Q(x) eşit verilmiş.
O halde derecesi (yani, x in üssü☺) aynı olan terimlerin kat sayıları eşit olacak.
Eşitleyin ve
(a + b = 8, c = 3 ve a – 2 = 4) eşitliklerinden
b + c = 5 bulun lütfen.

Örnek Soru

$$\frac{2x-7}{x^2+3x-4} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-1}$$

olduğuna göre, A.B çarpımı kaçtır?

Çözelim☺
Klasik bir polinom eşitliği sorusu. Gerçi ortada polinom filan gözükmüyor.☺ Ama hallederiz.
Önce eşitliğin sağ tarafındaki iki kesrin paydalarını eşitleyin bakalım.

$$\frac{2x-7}{x^2+3x-4} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+4)}{x^2+3x-4}$$

Aaa..
İki tarafın paydaları aynı oldu. İyi işte. O zaman payları da eşit olması lâzım ki bu eşitlik doğru olsun.
Paylarını eşitleyin bakalım.
$2x - 7 = A(x - 1) + B(x + 4)$
Bunu düzenleyin ve
$2x - 7 = (A + B)x + 4B - A$ yı elde edin.
Artık A + B = 2 ve 4B – A = – 7 olduğunu görüp bu denklemleri de çözüp☺ A = 3 ve B = – 1 i bulursunuz☺
Pırt yol☺
Bir eşitlikte x e uygun değerler (işe yarayacak değerler) verilerek de çözüm yapılabilir.
$2x - 7 = A(x - 1) + B(x + 4)$ eşitliğinde x = 1 verirsek A yı yok eder B yi – 1 bulabilir ve x = – 4 vererek de B yi yok edip A yı 3 bulabilirsiniz.
Kısacası x e öyle değerler verin ki birinde A diğerinde de B yok olsun☺

1. $P(x) = (a-2)x^2 + 2x - 5$

$Q(x) = 2x^2 + (b-5)x + 2 - c$

P(x) = Q(x) olduğuna göre, a + b + c toplamı kaçtır?

2. $P(x) = (a-2)x^2 + (2b+4)x + 5c - 1$

$P(x) = (x+2)^2$

P(x) = Q(x) olduğuna göre, a + b + c toplamı kaçtır?

3. $(3x-1)(ax+2) = 6x^2 + bx + c$

olduğuna göre, a + b + c toplamı kaçtır?

4. $(3x-1).(ax+2)=6x^2+cx+d$

olduğuna göre, a.c.d çarpımı kaçtır?

5. $x^2+5x-3=(a-2)x^2+(b+4)x+c+9$

olduğuna göre, a + b + c toplamı kaçtır?

6. $2x-8=ax(x-2)+bx(x+2)+c(x^2-4)$

olduğuna göre, a.b.c çarpımı kaçtır?

7. $ax^3+bx^2+cx+d=(x^2-1)(px^2+qx+r)+3x+2$

olduğuna göre, a + c toplamı kaçtır?

8. $\frac{3x-7}{x^2+x-6}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-2}$

olduğuna göre, A + B toplamı kaçtır?

9. $\frac{4x}{x^2+4x-12}=\frac{A}{x+6}+\frac{B}{x-2}$

olduğuna göre, A.B çarpımı kaçtır?

10. $\frac{5x-4}{x^2-3x-10}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-5}$

olduğuna göre, A.B çarpımı kaçtır?

11. $\frac{4x+7}{x^2+5x+4}=\frac{K}{x+4}+\frac{L}{x+1}$

olduğuna göre, K – L farkı kaçtır?

P(x) Polinomunun (x – a) İle bölümünden kalanı Bulma

Polinomlarda bölme işlemi yapmadan kalanı bulmanın temel mantığı çok basit. Ama kafayı biraz çalıştırırsanız tabii ki☺

Bütün kalan bulma sorularının mantığı aslında şu

P(x) polinomunun (x – a) ile bölümünden elde edilen bölüm B(x) ve kalan k olsun. Bunu

$$\begin{array}{r|l} P(x) & x-a \\ \cline{2-2} - & B(x) \\ \hline k & \end{array}$$

biçiminde gösterebilir ve **P(x) = (x – a).B(x) + k** olarak ifade edebilirsiniz.

Bu işlemde kalan (k) sabit sayıdır.

Sahi! Niye ki?

Buradaki amaç bölme işlemini yapmadan kestirmeden k değerini bulmak olduğuna göre (x – a)B(x) çarpımını sıfır yapan x değeri için işlem yapılır.

Yani x = a için, P(a) = (a – a).B(a) + k
Ve buradan da P(a) = k olarak bulunur.
Yani, x – a yı sıfır yapan x değerini polinomda x lerin yerine yazıyorsunuz. Başka da bir şey yok zaten. Bütün kalan bulma sorularındaki temel mantık bu işte.
Size diyeceğim o ki **kalan bulma sorularında hiçbir şey yapamıyorsanız bölme kuralını yazın ve x e vereceğiniz değeri görün.**
Gerisini getirisiniz herhalde☺

Birkaç örnekten sonra şunları hemencecik yazabileceksiniz zaten.☺
P(x) in x – 2 ile bölümünden kalan P(2),
P(2x – 1) in x – 2 ile bölümünden kalan P(3),
Q(x + 2) nin x – 2 ile bölümünden kalan Q(4) tür.
İsterseniz bunları bölme kuralını yazarak da görebilirsiniz.
İsterseniz yazın. Bir şey kaybetmezsiniz. Hatta daha fazlasını bile yazın.☺

Örnek Soru

$P(x)=x^7-2x+4$ **polinomunun x – 1 ile bölümünden kalan kaçtır?**

Çözelim☺

Uzun uzun polinom bölmesi yapmıycaz.
Ama bir şeyi iyice belleyin ve polinomlarda kalan bulma sorularında bölme kuralını yazın ilk önce.
Yazalım. **P(x) = (x – 1)B(x) + k** dır. Ve size sorduğum şey de buradaki k değeridir.
Hatırlayın. Bir eşitlikte x e uygun her değeri verebiliyorduk.
Eee...
Bu durumda k yı bulmak için x e (x – 1)B(x) çarpımını sıfır yapan değeri vermek lâzım.
Dolayısıyla x = 1 verdiğiniz zaman
P(1) = 0.B(0) + k olur.
Demek ki k = P(1) imiş.
Artık P(1) in 3 olduğunu bulursunuz. Dolayısıyla da kalanın 3 olduğunu☺

1. $P(x)=6x^2-x+2$ veriliyor

Buna göre, P(x) polinomunun x – 1 ile bölümünden kalan kaçtır?

2. $P(x)=x^3-2x^2+4x-5$ veriliyor.

Buna göre, P(x) polinomunun x + 1 ile bölümünden kalan kaçtır?

3. $P(x+1)=2x^2-x+1$ veriliyor.

Buna göre, P(x) polinomunun x – 2 ile bölümünden kalan kaçtır?

4. $P(x+2)=x^3-3x-2$ veriliyor.

Buna göre, P(x) polinomunun x + 1 ile bölümünden kalan kaçtır?

5. $P(x)=-2x^2+x-5$ veriliyor.

Buna göre, P(x + 1) polinomunun x – 2 ile bölümünden kalan kaçtır?

6. $P(x-3)=x^3-x-1$ veriliyor.

Buna göre, P(2x – 3) polinomunun x + 1 ile bölümünden kalan kaçtır?

7. $P(x-2)=x^3-x-11$ veriliyor.

Buna göre, P(x – 1) polinomunun 3x – 9 ile bölümünden kalan kaçtır?

8. $P(x+6)=2x^2-5x-1$ veriliyor.

Buna göre, P(4x) polinomunun x – 1 ile bölümünden kalan kaçtır?

9. $P(x)=x^3-2x^2+4m-5$ veriliyor.

P(x) polinomunun x + 1 ile bölümünden kalan 4 olduğuna göre, m kaçtır?

10. $P(x)=3x^4-x+a-5$ veriliyor.

P(x) polinomunun x – 1 ile bölümünden kalan – 6 olduğuna göre, a kaçtır?

11. $P(x-1)=x^3-kx+4$ veriliyor.

P(x) polinomunun kat sayılar toplamı 6 olduğuna göre, P(x) polinomunun x – 2 ile bölümünden kalan kaçtır?

1. $P(x+2)=x^3-3x-2k+1$ veriliyor

Buna göre, P(2x + 1) polinomunun x – 1 ile bölümünden kalan – 5 olduğuna göre, k kaçtır?

2. $P(x)=3x^3-x^2+4m$ veriliyor.

P(x) polinomunun çarpanlarından biri x + 1 olduğuna göre m kaçtır?

3. $P(x)=9x^2-9x+2a-8$ veriliyor

P(x – 2) polinomunun çarpanlarından biri x – 3 olduğuna göre, a kaçtır?

4. $P(x)=x^3-4x+k-3$ veriliyor.

P(x) polinomu x ile tam bölündüğüne göre, k kaçtır?

5. $P(x-1)=x^2-3x+k+2012$ veriliyor

P(x + 1) polinomunun bir çarpanı x + 2 olduğuna göre, k kaçtır?

6. P(x) polinom olmak üzere,

$$x^3-2x+a=(x-2)\cdot P(x)$$

olduğuna göre, a kaçtır?

7. P(x) polinom olmak üzere,

$$x^2+4x+m=(x-1)\cdot P(x)$$

olduğuna göre, P(x) polinomunun x – 1 ile bölümünden kalan kaçtır?

8. P(x) ve Q(x) polinomlarının x – 2 ile bölümünden kalanlar sırasıyla 3 ve 4 tür.

Buna göre, 2P(x) + Q(x) polinomunun x – 2 ile bölümünden kalan kaçtır?

9. P(x) ve Q(x) polinomlarının $x-1$ ile bölümünden kalanlar sırasıyla -2 ve 5 tir.

Buna göre, P(x) . Q(x) polinomunun $x-1$ ile bölümünden kalan kaçtır?

10. P(x) ve Q(x) polinomlarının $x-1$ ile bölümünden kalanlar sırasıyla 3 ve 2 dir.

Buna göre, m nin hangi değeri için $4P(x) + m.Q(x)$ polinomu $x-1$ ile tam bölünür?

11. $P(x)=x^3+5x^2-4x+25$ veriliyor.

P(x) polinomunun Q(x) polinomuna bölümünde bölüm $x-5$ olduğuna göre, kalan kaçtır?

12. $P(x)=\left(x^2-4\right)Q(x)+3x+2$ veriliyor.

Buna göre, P(x) polinomunun $x-2$ ile bölümünden kalan kaçtır?

13. $P(x+1)=(x+2)Q(x)+3x+2$ veriliyor.

Q(x) polinomunun kat sayılar toplamı 4 olduğuna göre, P(x) polinomunun $x-2$ ile bölümünden kalan kaçtır?

14. $P(2x+1)=\left(x^3+1\right)Q(x-1)+x^2+4$ veriliyor.

Q(x) polinomunun sabit terimi 3 olduğuna göre, P(x + 1) polinomunun $x-2$ ile bölümünden kalan kaçtır?

15. $P(x)=\frac{Q(x-1)}{x+2}+4x-2$ veriliyor.

Q(x) polinomunun $x-1$ ile bölümünden kalan 12 olduğuna göre, P(x) polinomunun $x-2$ ile bölümünden kalan kaçtır?

16. P(x) bir polinom olmak üzere,

$$x^3-5x+a=(x+2)\cdot P(x)$$

olduğuna göre, P(x) polinomunun $x+2$ ile bölümünden kalan kaçtır?

P(x) polinomunu x^n+a İle Bölümünden kalanı Bulma

Yine aynı mantık.
Öncekini anladıysanız bu da çok kolay.☺

Yine aynı şekilde P(x) polinomunun x^n+a ile bölümünden elde edilen bölüm B(x) ve kalan K(x) olsun diyelim. Bunu

$$\begin{array}{r|l} P(x) & x^n+a \\ \hline - \quad & B(x) \\ K(x) & \end{array}$$

biçiminde gösterebilir ve sonra da buradan

$P(x)=\left(x^n+a\right)B(x)+K(x)$ eşitliğini yazabilirsiniz

değil mi?

Püf noktası şurası: Bu eşitlikte K(x) i bulmak için yine aynı mantıkla $\left(x^n+a\right)B(x)$ çarpımını sıfır yapmaya çalışın.

Dolayısıyla $x^n+a=0$ dan $x^n=-a$ için işlem yapılarak K(x) bulunur.

Tabii ki burada kalanı (yani, K(x)) i bulmak için ilk önce P(x) polinomu x^n nin kuvvetlerine göre düzenlenmesi lazım. Sonra da x^n görülen yerlere "$-a$" yazılır.
Söylediklerimi bir örnek üzerinde anlatayım.

Örnek Soru

$$P(x)=3x^6+3x^5-2x^3+4x+6$$

polinomunun x^3+1 ile bölümünden kalan nedir?

Çözelim☺
Kalan bulma sorularını çözerken ilk adım bölme kuralını (neyi neye böldüğünüzü) yazarak K(x) i nasıl bulacağınızı görmek olmalı.

$$P(x)=\underbrace{\left(x^3+1\right)}_{\text{0 yapmaya çalışın:)}}B(x)+K(x)$$

$x^3+1=0$ dan $x^3=-1$ için K(x) i bulabilirsiniz.
Burada size küçük bir parantez açayım.

(Bu tür kalan bulma sorularında x in kaç olduğunu değil x^2 nin, x^3 ün ,.. neyse işte... Bunun kaç olduğunu bularak işlem yapın. Yoksa yamulursunuz☺)

İkinci adım P(x) i x^3 ün kuvvetlerine göre (bu soru için tabii ki) düzenlemek olmalı.
Düzenleyelim.

$$P(x)=3\left(x^3\right)^2+3x^3\cdot x^2-2x^3+4x+6$$

Bundan sonraki adım ve son adım ise x^3 gördüğünüz yerlere -1 yazmak olmalı.
Yazın ve kalanı

$$K(x)=3(-1)^2+3(-1)\cdot x^2-2(-1)+4x+6$$

$K(x)=-3x^2+4x+11$ olara bulun.

1. $P(x)=x^4+x^2+2$ veriliyor.

Buna göre, P(x) polinomunun x^2+1 ile bölümünden kalan nedir?

2. $P(x)=x^{12}+x^6-1$ veriliyor.

Buna göre, P(x) polinomunun x^6-3 ile bölümünden kalan kaçtır?

3. $P(x)=x^{48}+3x^{36}+2x^{12}$ veriliyor.

Buna göre, P(x) polinomunun $x^{12}+2$ ile bölümünden kalan kaçtır?

4. $P(x) = x^8 + x^4 + 1$ veriliyor.

polinomunun $x^4 - \sqrt{2}$ ile bölümünden kalan kaçtır?

5. $P(x) = x^6 + 3x - 2$ veriliyor.

polinomunun $x^3 - \sqrt{2}$ ile bölümünden kalan nedir?

6. $P(x) = x^{33} + x^{22} + x^{11}$ veriliyor.

Buna göre, P(x) polinomunun $x^3 + 1$ ile bölümünden kalan nedir?

7. $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + ax + b$ veriliyor.

P(x) polinomu $x^2 + 1$ ile tam bölündüğüne göre, a + b toplamı kaçtır?

8. $P(x) = ax^3 + (b-1)x - 2$ veriliyor.

P(x) polinomu $x^3 - 1$ ile tam bölünebildiğine göre, a.b çarpımı kaçtır?

9. $P(x) = ax^3 + bx^2 + 4x + 1$ veriliyor.

P(x) polinomu $x^2 - 2$ ile tam bölündüğüne göre, a.b çarpımı kaçtır?

10. $P(x) = 3x^3 + ax^2 + bx + 1$ veriliyor.

P(x) polinomunun $x^2 - 2$ ile bölümünden kalan 3x + 4 olduğuna göre, a + b toplamı kaçtır?

11. $P(x) = x^4 + 2x^3 + mx + n$ veriliyor.

P(x) polinomunun $x^3 + 1$ ile bölümünden kalan 5x − 2 olduğuna göre, m − n farkı kaçtır?

P(x) Polinomunun (x − a)(x − b) İle Bölümünden Kalanı Bulma

P(x) polinomunun (x − a)(x − b) çarpımına bölümünü şöyle ifade edelim.

$$\begin{array}{r|l} P(x) & (x-a)(x-b) \\ \cline{2-2} - & B(x) \\ \hline mx+n & \end{array}$$

Buraya bakın!

Bu kalan bulma türünde en önemli husus şudur.

P(x) polinomunun çarpanlarına ayrılmış olan (ya da ayrılabilen) (x − a)(x − b) gibi bir ifade ile bölümünden kalan 1. dereceden (mx+n) gibi bir polinom olduğu unutulmaması lâzım. Yoksa beyhude uğraşır durursunuz.

Eğer bunu düşünmeden çözmek isterseniz...

Neyse... ☺

Yukarıdaki bölme işlemini

$P(x) = (x - a).(x - b)B(x) + mx + n$

biçiminde ifade ettikten sonra yine aynı şeyi yapın.

Yani, (x − a)(x − b)B(x) çarpımını sıfır yapan x değerleri için (x = a ve x = b için) işlem yaparak m ve n değerlerini bulun.

Örnek Soru

P(x) polinomunun x − 2 ile bölümünden kalan 7, x − 3 ile bölümünden kalan 10 olduğuna göre, (x − 2)(x − 3) ile bölümünden kalan nedir?

Çözelim☺

Yine aynı şeyi yapın.

Bölme kuralını yazın ve kalanı (burada mx + n olduğunu da unutmayarak) bulmak için x e hangi değerleri vermeniz gerektiğini görün.

Yazalım mı?

$P(x) = \underbrace{(x-2)(x-3)}_{\text{0 yapmaya çalış:)}}B(x) + mx + n$

x = 2 için P(2) = 2m + n ve

x = 3 için P(3) = 3m + n yi bulun. Ama iyi de P(2) ve P(3) ü bilmiyoruz ki☺

Sorunun içinde en başta vermişim ya☺

P(x) in x − 2 ile bölümünden kalan P(2) = 7 ve x − 3 ile bölümünden kalan P(3) = 10 demişim.

Dolayısıyla olay biraz daha netleşti.

2m + n = 7

3m + n = 10

Bu denklemleri de bana çözdürüp m = 3 ve n = 1 ve kalanın 3x + 1 olduğunu bana buldurmazsınız herhalde☺

İşte bu kadaaaar...

Anlayacağınız hep aynı şeyi yaptık. Bölme kuralını yazıp hep bölenin yanındaki çarpanı sıfırlamaya çalıştık.

Anlayın artık☺

1. $P(x) = (x - 1)(x - 2)B(x) + mx + n$ veriliyor

P(1) = 3 ve P(2) = 7 olduğuna göre, (m, n) nedir?

2. P(x) polinomunun x + 1 ile bölümünden kalan −2, x − 2 ile bölümünden kalan 7 dir.

Buna göre, P(x) polinomunun (x − 2) (x + 1) ile bölümünden kalan aşağıdakilerden hangisidir?

A) x − 1 B) 2x + 3 C) x + 5 D) 5x + 1 E) 3x + 1

3. P(x) polinomunun x + 2 ile bölümünden kalan – 5 ve x – 1 ile bölümünden kalan 7 dir.

Buna göre, P(x) polinomunun (x + 2)(x – 1) ile bölümünden kalan aşağıdakilerden hangisidir?

A) x + 6 B) 2x + 3 C) 3x + 1 D) x + 1 E) 4x + 3

4. P(x) polinomunun x – 3 ile bölümünden kalan 6, x – 2 ile bölümünden kalan 4 tür.

Buna göre, P(x) polinomunun $x^2 - 5x + 6$ ile bölümünden kalan aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3x – 3 B) x + 3 C) x + 2 D) 2x E) 5x – 9

5. Kat sayılar toplamı 3 olan P(x) polinomunun x + 1 ile bölümünden kalan 5 tir.

Buna göre, P(x) polinomunun $x^2 - 1$ ile bölümünden kalan aşağıdakilerden hangisidir?

A) 4x – 1 B) x + 4 C) – x + 4 D) 2x + 1 E) 3x + 1

6. Sabit terimi – 2 olan P(x) polinomunun x – 2 ile bölümünden kalan 4 tür.

Buna göre, P(x) polinomunun $x^2 - 2x$ ile bölümünden kalan aşağıdakilerden hangisidir?

A) x – 1 B) 3x – 2 C) x – 2 D) 2x – 2 E) x + 2

7. P(x) polinomunun kat sayılar toplamı 3 ve sabit terimi 5 tir.

Buna göre, P(x) polinomunun $x^2 - x$ ile bölümünden kalan aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3x + 2 B) – 2x + 5 C) x + 1 D) $x^2 + 5$ E) 3x – 5

8. Üçüncü dereceden bir P(x) polinomu x – 2 ile bölündüğünde kalan – 2 olmaktadır.

P(x) polinomu x(x – 1)(x + 1) ile tam bölündüğüne göre, x + 2 ile bölümünden kalan kaçtır?

1. **P(x) polinomunun $x^2 - 4$ ile bölümünden kalan 3x + 1 olduğuna göre, x + 2 ile bölümünden kalan kaçtır?**

2. **P(x) polinomunun $x^2 - 1$ ile bölümünden kalan 2x + 3 olduğuna göre, x – 1 ile bölümünden kalan kaçtır?**

3. **P(x) polinomunun $x^2 - x - 6$ ile bölümünden elde edilen kalan 4x olduğuna göre, x – 3 ile bölümünden elde edilen kalan kaçtır?**

4. **P(x) polinomunun $x^2 + 3x - 4$ ile bölümünden elde edilen kalan x – 1 olduğuna göre x + 4 ile bölümünden elde edilen kalan kaçtır?**

5. **P(x) polinomunun $x^2 - 5x - 6$ ile bölümünden elde edilen kalan 4x + 2 olduğuna göre, x – 6 ile bölümünden elde edilen kalan kaçtır?**

6. **P(x)polinomunun $x^2 + 5x + 6$ ile bölümünden elde edilen kalan x olduğuna göre, x + 3 ile bölümünden elde edilen kalan kaçtır?**

7. **P(x) polinomunun $x^3 - 1$ ile bölümünden elde edilen kalan $2x^2 + 1$ olduğuna göre 3x – 3 ile bölümünden elde edilen kalan kaçtır?**

8. **P(x)polinomunun $x^3 + 8$ ile bölümünden elde edilen kalan $x^2 + 2$ olduğuna göre x +2 ile bölümünden elde edilen kalan kaçtır?**

Eğer rastlarsanız diye bahsediyorum☺
Asal polinom, baş katsayısı 1 olan ve iki polinomun çarpımı biçiminde yazılamayan polinomdur.

Meselâ $x+2$, x^2+1, x^2-x+1 birer asal polinomdurlar.

9. Aşağıdaki polinomların hangileri asal polinomdur?

a) $P(x)=x^3-2x$

b) $Q(x)=x^2-x+1$

c) $R(x)=2x+3$

d) $T(x)=x-2$

e) $N(x)=x^2-2x-8$

f) $M(x)=x^3-1$

10. Aşağıdaki polinomların hangileri asal polinomdur?

a) $S(x)=x^4-16$

b) $V(x)=x^3-3x^2+3x-1$

c) $K(x)=x^2+9$

d) $L(x)=4x^2-3$

e) $U(x)=-x+61$

f) $B(x)=x^3-2x$

11. $P(x)=(x^2-1)(x+2)$

$Q(x)=(x+1)(x^2-4)$

olduğuna göre, OBEB$[P(x),Q(x)]$ eşiti nedir?

12. $P(x)=(x^3-1)(x^2+x+1)(x-2)$

$Q(x)=(x-2)(x+1)(x^2+x+1)$

olduğuna göre, OBEB$[P(x),Q(x)]$ eşiti nedir?

13. $P(x)=(x^2-x-6)(x+2)$

$Q(x)=(x+3)(x^2+2x-8)$

olduğuna göre, OKEK$[P(x),Q(x)]$ eşiti nedir?

14. $P(x)=(x^4-1)(x^2+x-2)(x^2-1)$

$Q(x)=x(x+1)(x+2)$

olduğuna göre, OKEK$[P(x),Q(x)]$ eşiti nedir?

İkinci Dereceden Denklemler

Eşitsizlikler

Parabol

Başkası düştü mü, "çürük tahtaya basmasaydı" deriz.
Kendimiz düşünce, bastığımız tahtanın çürük
çıkmasından şikâyet ederiz.
Cenap Şahabettin

İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER

Matematiğin en temel konularından biri.
Kesinlikle zor bir konu değil. Ama çalışmadan yapabileceğiniz bir konu da değil kesinlikle. Belki bazı soruları eski bilgilerinizle çözebilirsiniz. Ama kastım o değil zaten.
Neyse... Konuya gireyim. Ne demek istediğimi birazdan anlayacaksınız.☺

$a \neq 0$ olmak üzere, $ax^2 + bx + c = 0$ biçimindeki ifadeler ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerdir. Bu denklemde a, b ve c denklemin kat sayıları, x te bilinmeyendir. Denklemi sağlayan x değerlerine **denklemin kökleri** denir.
Demek ki buradaki ilk işiniz denklemin kökünün ne işe yaradığını bilmek ve kat sayıları doğru yazabilmek.☺

İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemin çözümü

Şimdi kulaklarınızı dört açın.☺
$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin çözüm kümesi **DİSKRİMİNANT** (Bi daha okuyun☺) denilen şey☺ yardımıyla bulunabilir.
Amma...
Verilen ifadeyi çarpanlarına ayırabiliyorsanız hiç başka yollara sapmayın. Çarpanlarına ayırın ve kökleri bulun bi zahmet. En güzeli bu.

Örnek Soru

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

Çözelim:☺
Bir denklemi çözerken ilk önce bakın bakalım ki verilen ifade çarpanlarına ayrılıyor mu? Ayrılıyorsa ne alâ... Ayrılıyorsa hemen çarpanlarına ayırıp kökleri bulun. Yalnız burada yeri gelmişken şunu söyleyeyim. Denklemi çarpanlarına ayırarak çözecekseniz sağ tarafın sıfır olması lâzım.
$x^2 - 3x - 4 = 0$ eşitliğinden $(x-4)(x+1) = 0$ ve buradan da her bir çarpanı tek tek sıfıra eşitleyerek $x = 4$ ve $x = -1$ i bulursunuz artık.☺
Çözüm kümesini de $\{-1, 4\}$ yazarsınız herhalde☺

1. $x^2 + 3x + 2 = 0$
denkleminin çözüm kümesi nedir?

2. $x^2 - 5x = 0$
denkleminin çözüm kümesi nedir?

3. $x^2 - 5x - 6 = 0$
denkleminin çözüm kümesi nedir?

4. $2x^2 - 3x + 1 = 0$
denkleminin çözüm kümesi nedir?

5. $15x^2 + 7x - 8 = 0$
denkleminin çözüm kümesi nedir?

Denklemler kesirliyse ilk önce paydalarını eşitleyin. Sonra da bildiğiniz gibi devam edin☺

6. $\frac{1}{2x-3}=\frac{x+3}{x^2+1}$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

7. $\frac{x}{2x-3}=\frac{x+4}{x+1}$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

8. $\frac{1}{(x-2)(x+1)}=\frac{1}{2x^2-14}$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

9. $\frac{x-2}{2x-5}=\frac{x}{x+2}$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

Unutmayın☺
Denklemin kökü denklemi sağlayan değer demekti.☺

10. $x^2+kx-2=0$

denkleminin köklerinden biri – 1 olduğuna göre, k kaçtır?

11. $(a+1)x^2+x-2=0$

denkleminin köklerinden biri 3 olduğuna göre, a kaçtır?

12. $x^2+mx-3m-2=0$

denkleminin köklerinden biri 2 olduğuna göre, diğer kökü kaçtır?

13. $(2c-3)x^2+(c+5)x-1=0$

denkleminin köklerinden biri – 1 olduğuna göre, diğer kökü kaçtır?

Diskriminant (Δ) Yardımıyla Kök Bulma

Diskriminantın nereden çıktığının hikâyesine çok da girmeden derdimi anlatayım.☺
Epey eski zamanların birinde amcanın! biri işi gücü bırakıp $ax^2+bx+c=0$ denklemiyle kafayı bozmuş. (Başka işin mi yoktu be amca☺) o kafayla eşitliğinin her iki yanını a ya bölmüş ve sonra da gerekli düzenlemeleri ve ince ayarları yaparak x in neye eşit olduğunu bulmuş.
Tabii x sayı mayı çıkmamış.☺ Şöyle bir şey çıkmış.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Sonra da ne yapmış biliyor musun? (Nereden bileceksiniz ki?☺)
Her seferinde amele gibi bu işlemlerini yapmamak için şu kök içinde kalan b^2-4ac ifadesine **diskriminant** (Telaffuzu biraz zor ama...☺) diyerek bu konuda bilinmesi gereken tek formülcüğün altına imzasını atmış.
Sağol be amca. Matematiğe katkından dolayı Allah razı olsun.(Ötede işe yarayacak mı bilmiyorum. Ama burada yaradığı kesin☺)
Eee... Amcam o kadar uğraşmış. Siz de ezberlersiniz artık.☺...
Diskriminant Δ ile gösterilir. (Δ = delta diye oku.)

$$\Delta=b^2-4ac$$

İşte bu konunun en önemli formülcüğü bu.
Dolayısıyla $ax^2+bx+c=0$ denkleminin köklerine x_1, x_2 dersek.

Bu kökleri $x_{1,2}=\frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}$ ile bulabiliriz.

Tabii ki diskriminant eksi meksi olursa kök mök bulamazsınız. Gerçi sanal bir şeyler bulunabilir. Ama... O da sanal işte...

- $\Delta>0$ **ise denklemin farklı iki reel kökü vardır.** Ve bu kökler;

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ve } x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ dır.}$$

- $\Delta=0$ **ise** (Δ yerine sıfır yazın bakalım.) **eşit iki reel kök vardır.**

$$x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$$

Bu birbirine eşit köklere çakışık iki kök ya da **iki kat kök** de denir.

- **Δ < 0 ise denklemin reel kökü yoktur.**
(Kökler sanaldır. Yani karmaşık sayıdır.)

Başlamadan önce şunu da söyleyeyim. Denklemdeki kat sayıları doğru ifade edemezseniz bazı sorularda sıkıntı olabilir.

Örneğin,
$x^2+2x+5=0$
denkleminin katsayıları a = 1, b = 2 ve c = 5 tir.
$mx^2+(m-2)x+3m-1=0$
denkleminin kat sayıları a = m, b = m – 2, c = 3m – 1 dir.

1. **Aşağıdaki denklemlerin hangilerinin farklı iki reel kökü vardır?**

I. $x^2+4x-1=0$
II. $3x^2-5x+2=0$
III. $x^2+5x+2=0$
IV. $4x^2-12x+9=0$

2. **Aşağıdaki denklemlerin hangilerinin eşit (çakışık iki reel kökü vardır?**

I. $x^2+2x-1=0$
II. $2x^2-6x+9=0$
III. $2x^2-12x+18=0$
IV. $x^2-x+\frac{1}{4}=0$

3. **Aşağıdaki denklemlerin hangilerinin kökleri reel değildir?**

I. $x^2-2x+3=0$
II. $-2x^2+2x+1=0$
III. $x^2+9x+2=0$
IV. $4x^2-4x+1=0$

4. $x^2 + 4x - 1 = 0$
denkleminin çözüm kümesi nedir?

5. $x^2 + 2x - 4 = 0$
denkleminin çözüm kümesi nedir?

6. $x(x + 2) = 2(1 - x)$
denkleminin çözüm kümesi nedir?

7. $\frac{x}{x+2} = \frac{-4}{x}$
denkleminin çözüm kümesi nedir?

8. $x^2 + x - 5 = 0$
denkleminin köklerini bulunuz.

9. $x^2 + 2x + m + 1 = 0$
denkleminin çakışık iki reel kökü olduğuna göre, m kaçtır?

10. $(m-2)x^2 - 6x + 1 = 0$
denkleminin farklı iki reel kökü olduğuna göre, m nin alabileceği en büyük tam sayı değer kaçtır?

11. $x^2 - 5x - 3m + 4 = 0$
denkleminin kökleri reel olmadığına göre, m hangi aralıktaki değerleri alabilir?

1. $3x^2 - x + m + 1 = 0$
denkleminin kökleri reel olmadığına göre, m nin en küçük tam sayı değeri kaçtır?

2. $-x^2 - 5x + 3a + 1 = 0$
denkleminin farklı iki reel kökü olduğuna göre, a hangi aralıktaki değerleri alabilir?

3. $(a+1)x^2 + 4x + 2 = 0$
denkleminin reel kökü olmadığına göre, a nın en küçük tamsayı değeri kaçtır?

4. $x^2 + 5x + k + 1 = 0$
denkleminin farklı iki reel kökü olduğuna göre, k nın alabileceği pozitif tam sayıların toplamı kaçtır?

Kökler ile Kat Sayılar Arasındaki bağıntılar

Baştan söyleyeyim. Kökler toplamı, çarpımı filan sorulduğunda kökleri tek tek bulup işlem yapmayıp dediğim gibi yapacaksınız.☺

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun.

Kökler toplamı $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$

Kökler çarpımı $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Yalnız sorularda bu iki bağıntı dışında bir sürü başka şeylerin de sorulduğunu göreceksiniz. Ama şundan emin olun ki bu iki bağıntıyla hepsini çözebilirsiniz. Tabii biraz cebirsel yetenek lâzım olabilir. Ama problem değil. Sizde bolca var zaten.☺

Örnek Soru

$x^2 - 3x + 4 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

Buna göre,

a) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ **toplamı kaçtır?**

b) $x_1^2 + x_2^2$ **toplamı kaçtır?**

c) $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ **toplamı kaçtır?**

Çözelim☺
Aaa... Yukarda bunlarla ilgili bir şey yazmamışım. Demek ki yazmama gerek yokmuş.☺
a şıkkını çözelim.İlk önce paydaları eşitleyin bakalım.

a) $\underset{(x_2)}{\frac{1}{x_1}} + \underset{(x_1)}{\frac{1}{x_2}} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2}$ sonrası kolay. Zaten bu tür sorularda ne edip edip kökler toplamı ve çarpımını kullanmaya çalışmak lâzım.

Kökler toplamı $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-3)}{1} = 3$ ve kökler çarpımı da $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{4}{1} = 4$ olduğuna göre

$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{3}{4}$ olur.

Gelelim b şıkkına.

b) $x_1^2 + x_2^2$ toplamını nasıl elde edebilirsiniz.

Kökler toplamını biliyorsunuz değil mi? Kökler toplamını tekrardan yazın ve her iki tarafın karesini alın bakalım. Yani şunu yapın.

$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ idi.

Zaten buradaki x_1+x_2 ve $x_1 \cdot x_2$ yi biliyorsunuz.

O halde yerine yazın bu değerleri ve $x_1^2+x_2^2=1$ i bulun.

c şıkkı biraz daha gıcık gibi.☺ Olsun gıcıkları ben çözeyim ki işiniz kolaylaşsın☺

$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$ toplamında karekökü yok etmek lâzım.

Şöyle yapabilirsiniz.

$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=A$ olsun. Burada A yı bulcaksınız. Bunun için her iki yanın karesini alın bakalım. (Ki karekök yok olsun.)

$\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\right)^2=A^2$

$\left(\sqrt{x_1}\right)^2+2\sqrt{x_1}\cdot\sqrt{x_2}+\left(\sqrt{x_2}\right)^2=A^2$

$x_1+2\sqrt{x_1\cdot x_2}+x_2=A^2$

Artık kökler toplamı ve çarpımını yerine yazar ve $3+2\cdot 2=A^2$ den $A=\sqrt{7}$ yi bulursunuz.

Bu biraz zor kabul ediyorum. Ama buna fazla da takılmayın. Devam edin. En zoru buydu zaten.☺

5. $x^2-4x+2=0$ denkleminin kökleri x_1 **ve** x_2 dir.

Buna göre,

a) x_1+x_2 **toplamı kaçtır?**

b) $x_1.x_2$ **çarpımı kaçtır?**

c) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ **toplamı kaçtır?**

6. $x^2+3x-2=0$ denkleminin kökleri x_1 **ve** x_2 olduğuna göre,

a) x_1+x_2 **toplamı kaçtır?**

b) $x_1.x_2$ **çarpımı kaçtır?**

c) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ **toplamı kaçtır?**

d) $x_1.x_2^2+x_1^2.x_2$ **toplamı kaçtır?**

e) $x_2^2+x_1^2$ **toplamı kaçtır?**

f) $(x_1+1).(x_2+1)$ **çarpımı kaçtır?**

1. k gerçek sayıdır.

$(k+1)x^2+(2k-1)x+3=0$

denkleminin kökler toplamı – 3 olduğuna göre, k kaçtır?

2. a gerçel sayı olmak üzere,

$(3a-2)x^2-5x+2a=0$

denkleminin kökler çarpımı 1 olduğuna göre, a kaçtır?

3. $x^2-(m+1)x+3m+1=0$

denkleminin kökler toplamı 4 olduğuna göre, kökler çarpımı kaçtır?

4. $x^2+5kx+3k-6=0$

denkleminin kökler toplamı kökler çarpımından 16 fazla olduğuna göre k kaçtır?

5. $x^2-(m+2)x+4=0$

denkleminin köklerinin çarpma işlemine göre terslerinin toplamı 2 olduğuna göre, m kaçtır?

6. $\frac{2x-3}{2}=\frac{x+5}{x}$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

Buna göre, x_1+x_2 **toplamı kaçtır?**

7. $x^2=2(x+4)+x$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

Buna göre, x_1+x_2 **toplamı kaçtır?**

8. $(2x-1)(x+2)-3(x+2)=0$

denkleminin kökler toplamı kaçtır?

Köklerden birini bulabiliyorsanız denklemin içindeki bilinmeyeni rahatlıkla bulabilirsiniz. Yapmanız gereken tek şey denklemde x yerine bulduğunuz değeri (kökü) yazmak.☺

9. $x^2 - 2x + m + 3 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$x_1 \cdot (x_1 + x_2) = 4$ **olduğuna göre, m kaçtır?**

10. $x^2 - 6x + n = 0$

denkleminin kökleri arasında $x_1 = 2x_2$ **bağıntısı olduğuna göre, n kaçtır?**

11. $x^2 + 5x + 2k - 6 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$x_1 - 2x_2 = 1$

olduğuna göre, k kaçtır?

12. $x^2 + (2a-3)x + 8 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$x_1 = x_2^2$ **olduğuna göre, a kaçtır?**

13. $x^2 + (m-1)x + 9 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$\sqrt{x_1} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} = 2$

olduğuna göre, m kaçtır?

14. $x^2 + ax + 3b + 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$4.x_1 - 3x_2 = 11$

$x_1 - 3.x_2 = 5$

olduğuna göre, a + b toplamı kaçtır?

15. $x^2 - 5x + 9 = 0$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

Buna göre, $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ **toplamı kaç olur?**

16. $x^2 - 3x + 1 = 0$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 pozitif reel sayılardır.

Buna göre, $\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}$ **farkının pozitif değeri kaçtır?**

Kökleri Verilen İkinci Dereceden Denklemin Kurulması

$ax^2 + bx + c = 0$ denklemini a parantezine alırsanız

denklem $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$ şekline dönüşür.

Önce a yı atar sonra da şöyle düzenlerseniz☺

$x^2 - \left(\frac{-b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$

denklemini elde edebilirsiniz. Bunun içinde kökler toplamı ve farkını veren bağıntıları görüyorsanız şunu diyebilirsiniz.

Hımm..! Demek ki kökleri x_1 ve x_2 olan ikinci dereceden denklem $x^2 - \underbrace{(x_1 + x_2)}_{\text{Toplam}}x + \underbrace{x_1 . x_2}_{\text{Çarpım}} = 0$ biçiminde ifade ediliyormuş.

Bu arada şunu da söyleyeyim.

Köklerinden biri $a - \sqrt{b}$ **olan ikinci dereceden denklemin diğer kökü bunun eşleniğidir. Yani,** $a + \sqrt{b}$ **dir.** Neden acep?

Örnek Soru

Köklerinden biri $4 - \sqrt{2}$ **olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem nedir?**

Çözelim☺

Köklerden biri $4 - \sqrt{2}$ ise diğer kök bunun eşleniğidir.

Yani, $4 + \sqrt{2}$ dir.

Denklemi kurarken bize lâzım olan bi kökler toplamı bir de çarpımı.

Kökler toplamı $(4 - \sqrt{2}) + (4 + \sqrt{2}) = 8$ ve

Kökler çarpımı $(4 - \sqrt{2}) \cdot (4 + \sqrt{2}) = 14$ tür.

Bu değerleri yukarıdaki formülcükte yerine yazarak istenen denklemi $x^2 - 8x + 14 = 0$ olarak bulursunuz artık.

1. Kökleri 4 ve – 6 olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem nedir?

2. Kökleri $3 - \sqrt{2}$ **ve** $3 + \sqrt{2}$ **olan ikinci dereceden denklem nedir?**

3. Kökleri $1 - \sqrt{3}$ **ve** $1 + \sqrt{3}$ **olan ikinci dereceden denklem nedir?**

4. Köklerinden biri $5 - 2\sqrt{2}$ **olan ikinci dereceden denklem nedir?**

5. $x^2 - 3x + 1 = 0$

denkleminin köklerinin toplama işlemine göre terslerini kök kabul eden ikinci dereceden denklem nedir?

6. $x^2 - 2x - 1 = 0$

denkleminin köklerinin çarpma işlemine göre terslerini kök kabul eden ikinci dereceden denklem nedir?

7. $x^2 - 5x - 2 = 0$

denkleminin köklerinin çarpma işlemine göre terslerini kök kabul eden ikinci dereceden denklem nedir?

8. $x^2 - 6x - 8 = 0$

denkleminin her bir kökünün 2 fazlasını kök kabul eden denklem nedir?

9. **$2x^2 - 6x - 4 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna göre, kökleri $x_1 + 1$ ve $x_2 + 1$ olan ikinci dereceden denklem nedir?**

10. **$x^2 - 5x - 2 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna göre kökleri $x_1 - 2$ ve $x_2 - 2$ olan ikinci dereceden denklem nedir?**

11. $x^2 - 2x - 4 = 0$

denkleminin her bir kökünün 2 fazlasını kök kabul eden denklem nedir?

12. **$2x^2 - 6x - 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna göre kökleri $\frac{1}{x_1}$ ve $\frac{1}{x_2}$ olan ikinci dereceden denklem nedir?**

13. **$x^2 + 4x + 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna göre kökleri $\frac{x_2}{x_1}$ ve $\frac{x_1}{x_2}$ olan ikinci dereceden denklem nedir?**

İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denkleme Dönüştürülerek Çözülen Denklemler

Polinomların çarpımı veya bölümü Biçiminde olan Denklemler

Hiçbir özelliği yok bunların.
Sadece biraz çarpanlara ayırma bilgisi lâzım o kadar.
Problem yaşayacağınızı zannetmiyorum.
Her bir çarpanı ayrı ayrı sıfıra eşitleyin ve kökleri bulun. Bu kadarcık...

1. $\left(x^3 - 8\right)\left(x^2 + 2x - 15\right) = 0$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

2. $\left(x^2 - 4\right)\left(x^2 + 4x + 3\right) = 0$

denkleminin kökler çarpımı kaçtır?

3. $\frac{\left(2x^2 - x - 1\right)(x + 3)}{x + 2} = 0$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

Rasyonel Denklemler

Rasyonel denklemleri cebirsel yeteneklerinizi kullanarak çözün. Ama bulduğunuz x değerlerinin paydayı sıfır yapıp yapmadığına muhakkak bakın. (Gerçi benim buraya yazdıklarım da böyle bir problem olmayacak☺)
Çünkü biliyorsunuz ki☺ paydayı sıfır yapan (kesri tanımsız yapan) değerler kök olmaz.

4. $\frac{5}{x+1} - \frac{x}{4} = 0$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

5. $\frac{2x-7}{x-1} + \frac{x-2}{2} = 0$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

6. $\frac{x+3}{x+2} - \frac{4}{x} = \frac{12}{x^2 + 2x}$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

Köklü Denklemler

Köklü denklemlerin çözümündeki temel mantık şu: Kökü yalnız bırakın ve sonra da kökü yok edecek şekilde eşitliğin her iki yanının karesini, küpünü, ... alın. Çok pırt değil. Ama başka da yolu yok gibi☺
Burada bir de şu var. Denklemi çözüp x değerlerini bulmanız yetmiyor. Bulduğunuz bu değerlerin ilk denklemi sağlayıp sağlamadığına bakmanız lâzım.

7. $\sqrt{x+3} = x-3$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

8. $\sqrt{2x+7} - 2 = x$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

9. $\sqrt{x+\sqrt{x+2}} = 2$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

Yardımcı Bilinmeyen Kullanılarak Çözülen Denklemler

Bazen önünüze gelen denklem size çok da tanıdık gelmeyebilir. Ama küçük bir ayarla bu denklemi tanıdık hale getirebilirsiniz.

10. $x^4 + 2x^2 - 8 = 0$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

11. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

12. $x^6 - 28x^3 + 27 = 0$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

1. $4^x + 3.2^x - 4 = 0$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

2. $9^x - 3^{x+1} - 54 = 0$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

3. t pozitif reel sayı olmak üzere,

$4^x + 3 \cdot 2^{x+1} + 9 = t^2$

olduğuna göre, 2^x in t türünden değeri nedir?

4. $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12 = 0$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

5. $\frac{16}{x^4} - \frac{8}{x^2} + 1 = 0$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

6. $\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^2 - 3\left(\frac{2x+1}{x+2}\right) + 2 = 0$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

7. $2\left(\frac{3x+1}{x+2}\right) - 5\left(\frac{x+2}{3x+1}\right) + 3 = 0$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

8. $(\sqrt{x} + 1)^2 - 5(\sqrt{x} + 1) - 6 = 0$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

Mutlak Değerli Denklemler

Adı üstünde. Mutlak değerin içinde bilinmeyen içeren denklemler bunlar. Aslında mutlak değer konusunda bahsettiğim mutlak değerli denklemlerin aynısı bu.

9. $|x+2| = x^2$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

10. $|x^2 - 4| = |3x - 6|$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

11. $x \cdot |x-4| = 5$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

İkinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem Sistemi

İki bilinmeyen varsa genel mantık şu;
Verilen denklemlerin birinde bilinmeyenlerden birini çekip (diğerinin türünden) diğer denklemde yerine yazarak bir bilinmeyenli bir denklem elde edin. Sonra da bu denklemi çözün.

12. $y - x = 1$
$x^2 + y^2 = 13$

denklem sisteminin çözüm kümesi nedir?

13. $y + x = 2$
$x^2 + xy + y = 4$

denklem sisteminin çözüm kümesi nedir?

14. $a = 2b$
$a^3 + b^3 = 72$

olduğuna göre, a.b çarpımı kaçtır?

EŞİTSİZLİKLER

Eşitsizlik eşit olmayan şey demek.☺

Birinci dereceden bir eşitsizliği çözmek için öyle aman aman bir bilgiye gerek yok aslında. Eşitsizliklerle ilgili temel özellikleri bilseniz yeter de artar bilem.☺

Meselâ, $2x - 6 > 0$ biçimindeki bir eşitsizliği çözerken sıkıntı yaşar mısınız?

Veya $\frac{3x+8}{-2} \leq 5$ biçimindeki bir eşitsizliği?

Eğer bunlarda probleminiz varsa bence işi biraz daha temelden alıp antrenmanlarla matematik 1. ve 2. kitaplarından eşitsizlik olayını tekrar ele almanızda azim fayda var.☺ Bu sayfadaki antrenmanları yanlışsız çözebiliyorsanız bunlarda probleminiz yok demektir.

1. $3x - 12 > 0$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

2. $\frac{2x-4}{3} \leq 0$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

3. $\frac{15+3x}{4} > 6$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

4. $3(x-2) + x \leq -x + 14$

eşitsizliğini sağlayan en büyük tam sayı kaçtır?

5. $\frac{5x+3}{4} \geq 7$

eşitsizliğini sağlayan en küçük tam sayı kaçtır?

6. $x + \frac{1-x}{4} < 4$

eşitsizliğini sağlayan pozitif tam sayıların toplamı kaçtır?

Hatırlayın☺
Bir eşitsizliğin her iki yanı negatif bir sayı ile çarpılır veya bölünürse eşitsizliğin yönü değişiyordu.

7. $\frac{2x-4}{-5} \geq -2$

eşitsizliğini sağlayan en büyük tam sayı kaçtır?

Fakat eşitsizlik x kareli mix kareli şeyler içeriyorsa işin kuralları değişiyor.☺ Bu tip eşitsizliklerde daha önceki yöntemler işe yaramıyor. Onun için yeni şeyler söylemek lâzım. Zaten bu faslı da bunun için açtım.☺

Meselâ $x^2 - x - 2 < 0$ gibi ya da $\frac{x^2 + 2x - 8}{2x - 1} \leq 0$ gibi daha zormuş gibi duran (Ama aslında öyle olmayan) bir eşitsizliği nasıl çözeceksiniz? Var mı bi fikriniz? Şimdiki olayımız bu.

İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler

Eşitsizlikleri "Yok şöyle olursa şöyle çözeceksin. Yok şöyle ise böyle..." gibi dallandırmadan esas olayı anlatayım.
Hem de test tekniğine uygun olarak.☺ Bu işin pratiği şu

$\frac{x^2 - 3x - 4}{x + 2} > 0$ veya $(4 - x^2)(2x + 6) \leq 0$ gibi bir eşitsizliği çözerken yapmanız gerekenler çok zor değil. Daha önceden bildiğiniz şeyler. Ama söyleyeceklerimi sırayla yapmanızda fayda var.☺

İlk önce her bir çarpanın köklerini bulun ve sayı doğrusuna yerleştirin. (Tablo yapın yani.) Tabii ki en büyük kökü en sağa yazacaksınız doğal olarak.☺

İkinci olarak

Her bir çarpanın en büyük dereceli terimlerinin işaretlerini çarpın (bölün) ve bulduğunuz işareti tablodaki en büyük kökün sağına yazın bi zahmet.

Üçüncü olarak ise

Tabloda sağdan sola doğru gelirken köklere rastladıkça işareti değiştirin.

Bundan sonrası çözüm kümesini yazmaya kalıyor.
İyi de çözüm kümesi ne?
Bunu nasıl bulacağınızı biliyor musunuz?
Söyleyeyim.

Eğer çözmeye çalıştığınız eşitsizlik < 0 veya ≤ 0 biçiminde ise tabloda " – " olan aralıklar, > 0 veya ≥ 0 biçiminde ise " + " olan aralıklar aradığınız çözüm kümesidir.

Artık çözüm kümesini yazarsınız.☺
Bu anlattıklarımı bir soru üzerinde izah edeyim mi?

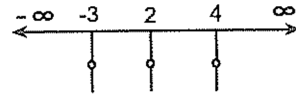
Örnek Soru

$$\frac{x^2 - x - 12}{x - 2} < 0$$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

Çözelim☺
Gerçi bunda sıkıntı yok. Ama siz siz olun ve bir eşitsizliği çözerken ilk önce sağ tarafın sıfır olup olmadığına bakın. Sebebini sonra söylicem.
Diyelim ki sağ taraf sıfır. (Ki bunda öyle zaten.)
Şimdi yapmanız gereken sol taraftaki her bir çarpanı sıfıra eşitleyip köklerini bulmak.

Yani, $x^2 - x - 12 = 0$ dan $x = 4$ ve $x = -3$ ile $x - 2 = 0$ dan $x = 2$ yi buldunuz mu?
Kökleri bulduktan sonra bu kökleri sayı doğrusuna sıralayın. Yani, yerleştirin. (Aşağıdaki gibi bir tablo yapın. Köklerden aşağı bir çizgi çizin ve ortasına bir yuvarlak yapın.☺)

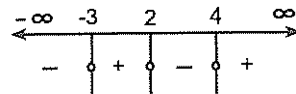


Sıra tabloda nerelere artı, nerelere eksi yazacağınıza geldi.
En sağa (4 ün sağına) yazacağınız işareti en büyük dereceli terimlerin işaretini bölerek bulun.

En sağa $\frac{+x^2 \ldots}{+x \ldots} = +$ yazmanız lâzım.

En sağa yazacağınız işareti bulduktan sonra sola doğru her kökte işareti değiştirerek gelin.

Şimdi işaretli tablonun son hali şöyle olması lâzım.



İşaret tablosunu hazırladıktan sonra artık eşitsizliğin çözüm kümesini yazabilirsiniz.
Eşitsizlik, ... < 0 şeklinde olduğu için tabloda eksi olan aralıklar çözüm aralıklarıdır. Bunun anlamı tabloda eksi olan aralıklardaki her x değeri için bu eşitsizlik doğrudur.
Dolayısıyla bu eşitsizliğin çözüm kümesi
$(-\infty, -3) \cup (2, 4)$ tür. Ama olayın özeti şu: Kökleri bulup sayı doğrusuna sıralayın. Sonra da en sağa yazacağınız işaret olayını halledip köklerde işareti değiştirin ve çözüm kümesini bulun☺

1. $(x + 2)(x - 1) < 0$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

2. $(x + 4)(x - 1) < 0$

eşitsizliğini sağlayan en küçük x tam sayısı kaçtır?

3. $(2x - 11)(x + 5) < 0$

eşitsizliğini sağlayan en büyük x tamsayısı kaçtır?

4. $\frac{x + 2}{x - 1} < 0$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

5. $\frac{-x + 3}{x - 1} > 0$

eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

6. $\frac{3x + 7}{7 - 2x} > 0$

eşitsizliği x in kaç tam sayı değeri için doğrudur?

7. $\frac{x - 6}{4 - 3x} > 0$

eşitsizliğini sağlayan tam sayıların toplamı kaçtır?

8. $(x + 1)(x - 2)(x + 3) < 0$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

9. $(x^2-4)(x+1)>0$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

10. $(x+4)(x^2-1)<0$

eşitsizliğini sağlayan en büyük x tamsayısı kaçtır?

11. $(27-x^3)(x-2)>0$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

12. $\frac{(2-x)(x+3)}{x-1}<0$

eşitsizliğini sağlayan en küçük x tamsayısı kaçtır?

13. $\frac{(x-9)(x+6)}{x+1}<0$

eşitsizliğini sağlayan en büyük negatif x tam-sayısı kaçtır?

14. $\frac{9-x^2}{x+2}>0$

eşitsizliğini sağlayan pozitif x tam sayıları toplamı kaçtır?

15. $\frac{x-4}{x^3-1}>0$

eşitsizliğini sağlayan en büyük negatif tam-sayı ile en küçük pozitif tamsayının çarpımı kaçtır?

16. $\frac{x+6}{x^2-x-6}<0$

eşitsizliğini sağlayan en büyük iki x tamsayı değerlerinin toplamı kaçtır?

1. $\frac{15-2x-x^2}{x-1}>0$

eşitsizliğini sağlayan en büyük x tam sayısı kaçtır?

2. $\frac{x-5}{x^2-4x-12}>0$

eşitsizliğini sağlayan en küçük x tam sayısı kaçtır?

3. $\frac{x+6}{x^3-8}<0$

eşitsizliği x in kaç tam sayı değeri için doğru-dur?

4. $(x+5)(x-2)(-x+4)>0$

eşitsizliğini sağlayan x doğal sayısı kaçtır?

5. $\frac{x^2-4}{-x^2+5x+6}>0$

eşitsizliğini sağlayan en küçük x tam sayısı ile en büyük x tam sayısının toplamı kaçtır?

6. $\frac{2x-12}{x^3+8}<0$

eşitsizliğini sağlayan tam sayıların toplamı kaçtır?

7. $-x^2+4x+32>0$

eşitsizliğinin en geniş çözüm aralığı (a,b) olduğuna göre, a.b çapımı kaçtır?

8. $\frac{2x-12}{3x+6}<0$

eşitsizliğinin en geniş çözüm aralığı (a, b) olduğuna göre, a + b toplamı kaçtır?

9. $\dfrac{(x^2+x-20)(x+1)}{x-3}<0$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

10. $\dfrac{-x(x^2-16)}{x-2}>0$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

11. $\dfrac{(1-x^3)(x^2-4)}{x-6}>0$

eşitsizliğini sağlayan pozitif tam sayıların toplamı kaçtır?

12. $\dfrac{x.(x^2-3x-4)}{(x-1)}<0$

eşitsizliğini sağlayan x tam sayılarının toplamı kaçtır?

13. $\dfrac{(x^2+3x-10)}{(x+1)(x^2-16)}>0$

eşitsizliğini sağlayan en küçük x tam sayısı kaçtır?

14. $\dfrac{9x-x^3}{x+6}>0$

eşitsizliğini sağlayan pozitif tam sayıların toplamı kaçtır?

15. $2x^2+3x-m^2+4=0$ denkleminin kökleri

x_1 ve x_2 dir.

m nin hangi değerleri için $x_1 \cdot x_2 > 0$ **dır?**

16. $(m-1)x^2+(m^2-9)x-2=0$ denkleminin kökleri

x_1 ve x_2 dir.

m nin hangi değerleri için $x_1 + x_2 < 0$ **dır?**

Eşitsizlikleri çözerken içler dışlar çarpımı yapmayın. Ve sağ tarafı hep sıfır yapın.

Meselâ $\dfrac{3x+6}{x-2}<1$ gibi bir eşitsizliği çözerken

yapmanız gereken ilk iş $\dfrac{3x+6}{x-2}-1<0$ dan

$\dfrac{2x+8}{x-2}<0$ eşitsizliğini elde edip çözüme öyle başlamak olmalı.

İçler dışlar çarpımı yapınca veya o sağdaki 1 i sola almadan işlem yapınca yanlış çıkıyor da☺

Siz en iyisi mi lâf dinleyin. Ve tecrübeye güvenin☺

1. $x^2<x+2$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

2. **Hangi sayıların karesiyle 2 katının toplamı 15 ten küçüktür?**

3. $-x(x-4)>3$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

4. $\dfrac{3x+2}{x-2}<1$

eşitsizliğini sağlayan x tamsayıları kaç tanedir?

5. $\dfrac{4x}{x-1}<3$

eşitsizliğini sağlayan x tamsayıları toplamı kaçtır?

6. $\dfrac{x^2}{x+4}>2$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

7. $\dfrac{3}{x+1}<\dfrac{2}{x-1}$

eşitsizliği x in kaç pozitif tamsayı değeri için doğrudur?

8. $\dfrac{x}{x+5} < \dfrac{2}{x-1}$

eşitsizliğini sağlayan pozitif tamsayıların toplamı kaçtır?

9. $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-1} < 1$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

10. $x - \dfrac{5}{x+2} > 2$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

Eşitsizliklerde sadeleştirme yaparsanız yamulabilirsiniz.☺

11. $(x-2)^2 < 5(x-2)$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

12. $\dfrac{x+1}{x-1} > \dfrac{x-1}{x+1}$

eşitsizliğini sağlayan en küçük x tamsayı değeri kaçtır?

13. $x < \dfrac{18}{x+3}$

eşitsizliğini sağlayan pozitif tamsayıların toplamı kaçtır?

14. $(4-m)x^2 - (m-5)x + m - 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

Buna göre, m nin hangi değerleri için $x_1 \cdot x_2 < 1$ dir?

15. $x^2 - (2m+6)x + m - 4 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} < 1$ **olduğuna göre, m nin alabileceği tamsayı değerler toplamı kaçtır?**

Peki, eşitsizlik < 0 veya > 0 şeklinde değil de ... ≤ 0 veya ... ≥ 0 şeklinde olursa ne değişir?

Aslında çözüm şekli olarak hiçbir şey değişmez. Sadece çözüm kümesini yazarken küçük bir değişiklik var. O kadar.

≥ 0 ve ≤ 0 biçimindeki eşitsizliklerde payı sıfır yapan değerleri çözüm kümesine dâhil edin. Paydanınkileri ise etmeyin.

Örnek üzerinde göstereyim.

Örnek Soru

$\dfrac{x^2-3x-4}{2-x} \geq 0$

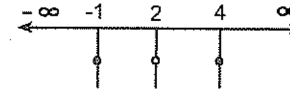
eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

Çözelim☺

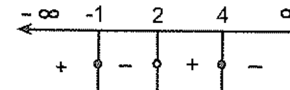
Çözüm yolu yine aynı. İlk önce pay ve paydayı sıfır yapan x değerlerini bulun.

$x^2 - 3x - 4 = 0$ dan $x = 4$ ve $x = -1$ ve $2 - x = 0$ dan $x = 2$ yi bulup sayı doğrusuna yerleştirin.

Köklerden aşağı çizdiğiniz çizgilerin ortasına yaptığınız yuvarlaklar vardı ya? İşte bunlardan paydanın köklerindekilerin içi boş diğerleri dolu olacak. Yani şöyle:



Sıra işaret olayına geldi. En sağa $\dfrac{+x^2...}{-x..} = -$ olduğundan eksi yazıp sola doğru her kökte işareti değiştirerek gelin.



Üstteki gibi bir tablo yapmış olmanız lâzım.

Artık çözüm kümesini yazabilirsiniz.

Bir kere eşitsizlik ≥ 0 şeklinde olduğundan tabloda + (artı) olan yerleri alacaksınız. Bir şey demiyorum. Alın. Ama alırken **içi dolu olan kökleri çözüm kümesine dâhil etmeyi sakın unutmayın.**

Buradaki en önemli olay bu aslında.

Dolayısıyla, bu eşitsizliğin çözüm aralığını $-\infty < x \leq -1$ veya $2 < x \leq 4$ olarak ifade etmeniz lâzım. (ki doğru olsun.)

Tabii bunu $(-\infty, -1] \cup (2, 4]$ şeklinde de ifade edebilirsiniz. Keyfiniz bilir☺

İsterseniz tekrar söyleyeyim. ≤ 0 veya ≥ 0 şeklindeki eşitsizlikleri çözerken farklı bir şey yapmanıza gerek yok. İlk çözdüğünüz eşitsizlikler gibi çözün. Yani, kökleri bulun. Sayı doğrusunda sıralayın. İşaret olayını halledin. Halledin fakat çözüm kümesini yazarken dikkatli olun. Yanlış yazarsanız anlattığım bunca şeyin bi kıymet-i harbiyesi kalmıyor da☺

Unutmayın ki paydanın kökleri hiçbir zaman çözüme dâhil edilmez. (yani, paydanın köklerinde kapalı parantez olmaz.)

1. $x^2 - 3x - 18 \leq 0$

eşitsizliğini sağlayan x tam sayılarının toplamı kaçtır?

2. $x^2 - 6 \geq 5x$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

3. $\dfrac{x-3}{x-1} \leq 0$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

4. $\frac{x^2-3x-54}{x+1} \le 0$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

5. $\frac{x^2-9}{x-1} \ge 0$

eşitsizliğini sağlayan en küçük x tam sayısı kaçtır?

6. $\frac{x^2-3x-18}{x^2-x-2} \le 0$

eşitsizliğini sağlayan en küçük iki x tam sayısının toplamı kaçtır?

7. $\frac{x+2}{(x^3-8)(x+1)} \ge 0$

eşitsizliğini sağlayan en küçük x tam sayısı kaçtır?

8. $\frac{x(4-x^2)}{x+4} \ge 0$

eşitsizliğini sağlayan en küçük x tam sayısı kaçtır?

9. $\frac{x(x^2-2x-8)}{x-3} \le 0$

eşitsizliğini sağlayan x tam sayıları toplamı kaçtır?

10. $\frac{x+6}{x^2-x-6} \le 0$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

11. $\frac{15-2x-x^2}{x-1} \ge 0$

eşitsizliğini sağlayan en büyük x tam sayısı kaçtır?

1. $\frac{x^2-25}{x^2-x-12} \ge 0$

eşitsizliğini sağlayan en büyük x negatif tamsayısı kaçtır?

2. $\frac{x^2-3x-18}{(x+2)(x^2-1)} \le 0$

eşitsizliğini sağlayan en büyük x tamsayısı kaçtır?

3. $\frac{x^2-9}{-x^2+2x+8} \ge 0$

eşitsizliğini sağlayan en küçük x tamsayısı ile en büyük x tamsayısının toplamı kaçtır?

4. $\frac{3x^2+17x+22}{3x-1} \ge 0$

eşitsizliğini sağlayan kaç farklı x negatif tamsayısı vardır?

Bazı çarpanların kökü olmayabilir. Olmayan kökü tabloda gösteremezsiniz elbette☺ Ama en sağa yazacağınız işareti belirlerken bu çarpanı da hesaba katarsınız tabii ki.

5. $\frac{x^2-x+1}{x-3} < 0$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

6. $(4x-x^2)(x^2+4) \ge 0$

eşitsizliğini sağlayan tam sayıların toplamı kaçtır?

7. $\frac{(x^2+1)(x^2-2x)}{x+5} \le 0$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

8. $\frac{2^x(x-5)}{x+1} \le 0$

eşitsizliğini sağlayan tam sayıların toplamı kaçtır?

Size bahsetmediğim bir şey daha var. Tek katlı kök - çift katlı kök meselesi. Özellikle çift katlı kök olayı çok önemli. Çünkü **tabloda işaretler yazılırken çift katlı köklerde işaret değiştirilmez.** Bunu da izah edeyim.

Çift katlı kök - tek katlı kök meselesi

Eşitsizlikte aynı kökten çift sayıda olan köklere **çift katlı kök**, tek sayıda olanlara da **tek katlı kök** denir.

"Bu ne demek?" mi?☺

Meselâ, $(x-2)^2=0$ eşitliğinde $x=2$ çift katlı köktür.(Burada iki tane 2 vardır. Göremediniz di mi?☺)

Şöyle aslında. $(x-2)^2=(x-2)(x-2)=0$ olarak yazıp her çarpanı ayrı ayrı sıfıra eşitleyince iki tane (yani, çift sayıda) 2 bulursunuz. Öyle değil mi?

Yine aynı şekilde $(x+1)^4=0$ eşitliğinde $x=-1$ çift katlı köktür. (Bunda da dört tane (çift sayıda) – 1 vardır.)

Ve $(x-4)^3=0$ denkleminin kökü 4 tür. (Burada ise tam üç tane (tek sayıda) 4 vardır.

Çift katlı kökleri tabloda gösterirken iki çizgi çizilir. (Ki çift katlı kök olduğu belli olsun.)

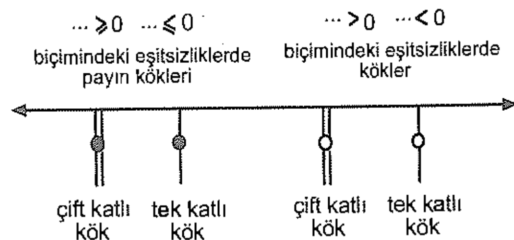
Aslında parantez üssü çift olan yerde çift katlı, parantez üssü tek olan yerde de tek katlı kök var diyebilirsiniz. Ama aynı kökten başka yerde olmaması lâzım.

Anladınız mı?

? ☺☺☺

Anladıysanız güzel de... ☺.

Neyse... Şuna da bakın bi. İşe yarayabilir. Hem de şimdiye kadar anlattığım çoğu şeyin özeti var bunda.



Üstteki şekilcikte şunları görün☺

Bir kere çift katlı köklerde çift çizgi var.

İkinci olarak da eşitlik durumu varsa payın köklerinde yuvarlakların içi dolu.

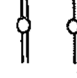
Bir de çözüm kümesini yazarken şunları da dikkate alın.

Yoksa...☺

Tabloda (yandaki gibi) içi dolu olarak gösterilen kökleri çözüm kümesine dâhil edin.



Tabloda (yandaki gibi) içi boş olarak gösterilen kökleri ise çözüm kümesine dâhil etmeyin. Çünkü dâhil ettiğiniz de yamulmuş olacaksınız muhtemelen.☺



Zaten eşitsizlikte eşitlik durumu (≥ veya ≤ durumu) söz konusu değilse hiçbir kökü çözüm kümesine dâhil etmezsiniz. Yani, kapalı parantez yapmazsınız.

Paydanın köklerini çözüm kümesine hiçbir zaman dâhil etmeyin.

Niye ki sahi?

Neyse...

Epeydir eveleyip geveleyerek anlatmaya çalıştığım şeyin özeti şu aslında

Eşitsizliğin tablosunu doğru yapın,

Tek katlı-çift katlı kökün ne olduğunu bilin,

Hangi köklerin çözüme dâhil olup olmadığına dikkat edin,

Hangi aralıkların çözüm olduğunu yazabilin.

Yeter.☺

İyi mi?

Son kez söyleyeyim. Sonra unutur munutursunuz☺

Çift katlı köklerde işaret değiştirmeyeceksiniz.

9. $(x-5)^2(x+3)<0$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

10. $(x-5)^3(x+3)^2<0$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir

Bir de tek katlı çift katlı kök meselesinde üssün çok büyük olmasının bir önemi yok. Önemli olan üssün tek mi çift mi olduğu. Aslında parantez üssü çift ise 2, tek ise 1 almanızda hiçbir sakınca yok.

Yani, $(x-2)^{61}(x^2-1)^{2012}<0$ eşitsizliğinin çözümü ile $(x-2)(x^2-1)^2<0$ eşitsizliğinin çözümü aynıdır. Hiç bir farkı yoktur.

1. $(x^2-1)(x+2)^{10}>0$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

2. $(x-2)^3(x+3)^2>0$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

3. $\dfrac{x^2-4x+4}{2x+6}<0$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

4. $(x+2)^{61}(x-3)^{126}\geq 0$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

5. $(8-x^3)^4(x-6)^5\leq 0$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

6. $\dfrac{(x+2)^2}{-x(x-4)}\geq 0$

eşitsizliğini x in kaç tam sayı değeri için doğrudur?

7. $-x(x-6)(x+4)^2\geq 0$

eşitsizliğini sağlayan tam sayıların toplamı kaçtır?

8. $x(x-6)(x-3)^2<0$

eşitsizliğini sağlayan tam sayıların toplamı kaçtır?

9. $\dfrac{(x+4)^2}{(x-2)^3}<0$

eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

10. $\dfrac{x^2(x+6)^{61}}{(x-2)^{1967}}\le 0$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

11. $\dfrac{(x^3+1)^2}{(x+3)}\ge 0$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

Eşitsizlikte mutlak değerli çarpan varsa bunun köklerini çift katlı kök olarak almanızda hiçbir sakınca yok.

12. $\dfrac{|x-3|}{x-6}<0$

eşitsizliğini sağlayan pozitif tam sayıların toplamı kaçtır?

13. $\dfrac{|x+3|}{x^2-x-20}<0$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

14. $|x-6|(x^2-9)\le 0$

eşitsizliğini sağlayan tam sayıların toplamı kaçtır?

15. $|x-2|(-x^2+2x+15)>0$

eşitsizliğini sağlayan tam sayıların toplamı kaçtır?

Eşitsizlik Sistemleri

Sistem dediysem öyle karmaşık şeyler zannetmeyin. Çok kasmaya gerek yok. Genellikle iki eşitsizlik olur bunlarda. Üç olduğu da olur belki. Ama çok nadir.

Daha önce çözdüğünüz eşitsizliklerden farklı bir şey yok burada. Şunu bilin yeter.
Bir eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulurken her bir eşitsizliğin çözüm kümesi ayrı ayrı bulunur. Sonra da bu çözüm kümelerin kesişimleri alınır.
Buradaki tek farklılık bu çözüm kümelerinin kesişimini bulma olayı.

Örnek Soru

$x(x-5)<0$

$\dfrac{x^2-3x}{-x+1}>0$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi nedir?

Çözelim.☺
İki eşitsizliği de sağlayan değerleri bulcaz. Ama bunun için ilk önce her birini tek tek ele alıp aynı tabloda göstermek lâzım ki kesişimleri daha kolay görülsün.☺
$x(x-5)<0$ in çözüm kümesini bulun.
(0, 5) bulmuş olmanız lâzım.

Şimdi de $\dfrac{x^2-3x}{-x+1}>0$ ın çözüm kümesini bulun.
Bunun da $(-\infty, 0)\cup(1, 3)$ bulmuş olmanız lâzım.
Ve bunları aynı tabloda gösterin.

x		0		1		3		5		∞
x(5 - x)	+	∘	−	⋮	−	⋮	−	∘	+	
$\dfrac{x^2-3x}{-x+1}$	+	∘	−	∘	+	∘	−	⋮	−	

çözüm aralığı

Bundan sonra ise ikisinin kesişimini (Yani, ikisini de sağlayan değerleri) bulun.
İkisini de sağlayan değerler (1, 3) aralığı olduğundan bu eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi (1, 3) açık aralığıdır.
Anlaşıldı mı şimdi?

1. $\dfrac{5x-4}{2}\le 8$

$3x-4>2$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi nedir?

2. $2m+2>0$

$m^2-2m-3>0$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi nedir?

3. $x^2>x$

$x^2+4x-5<0$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi nedir?

4. $\frac{x+2}{5-x} > 0$

$x^2 - 4 > 0$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi nedir?

5. $x^2 - x - 20 \leq 0$

$-x(x-2) > 0$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi nedir?

6. $\frac{x^2-9}{8-2x} > 0$

$x^2 - x - 6 > 0$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi nedir?

7. $\frac{x}{x-3} < 0$

$x^2 - 7x + 10 > 0$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi (a, b) açık aralığı olduğuna göre, a + b toplamı kaçtır?

8. $x^2 - 3x > 0$

$x^2 - 8x + 12 \leq 0$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi (a, b] yarı açık aralığı olduğuna göre, a.b çarpımı kaçtır?

9. $\frac{2x-6}{x^2-4} > 0$

$(x-1)(x-3) < 0$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi nedir?

1. $\frac{1}{x} > \frac{1}{x^2}$

$x - 2 < 2x - 6$

eşitsizlik sistemini sağlayan en küçük x tamsayısı kaçtır?

2. $\frac{x-6}{x+2} < 0$

$(x^2-1)(x+2) < 0$

eşitsizlik sistemini sağlayan x tamsayısı kaçtır?

3. $(x+2)(3x-9) > 0$

$\frac{4x-12}{x^2-x-2} > 0$

eşitsizlik sistemini sağlayan en küçük iki x tamsayı değeri toplamı kaçtır?

4. $2x - 3 < x + 11 \leq 4x - 16$

eşitsizlik sistemini sağlayan x tam sayılarının toplamı kaçtır?

5. $2 < x^2 - x < 20$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

6. $1 < \frac{2x-2}{x+1} \leq 2$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

İkinci Dereceden Denklemin Köklerinin Varlığı ve İşareti

Baştan söyleyeyim. Köklerin işaretini incelerken kök mök bulmayacaksınız.

Çünkü $ax^2+bx+c=0$ denklemini çözmeden, köklerinin varlığını ve işaretini belirleyebilirsiniz.
Nasıl mı?
İzah edeyim.
Bunun için verilen denklemin sırasıyla,

a) **Diskriminantına, (Yani $\Delta=b^2-4ac$ ye)**

b) **Kökler çarpımına (Yani, $x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$ ya)**

c) **Kökler toplamına, (Yani $x_1+x_2=\frac{-b}{a}$ ya)**

bakarak köklerin reel olup olmadığı, eğer kökler reel ise pozitif mi, negatif mi oldukları hakkında karar verebilirsiniz.Ama bir şartla.
Dediklerimi adam gibi öğrenirseniz.☺

Neyse... Bu olayı çok da kasmadan önünüze gelebilecek olan şeyleri vereyim.

$ax^2+bx+c=0$ denkleminin,
Ters işaretli iki kökü (Biri pozitif, diğeri negatif) olması için kökler çarpımı negatif olmalı.
Yani, $x_1.x_2<0$ olmalı. En önemlisi bu. Bence tabii ki☺

Pozitif iki kökü olması için, sırasıyla
I) $\Delta>0$
II) $x_1.x_2>0$
III) $x_1+x_2>0$

Negatif iki kökü olması için, sırasıyla
I) $\Delta>0$
II) $x_1.x_2>0$
III) $x_1+x_2<0$

eşitsizliklerinin sağlanması gerekir.
Dikkat ederseniz **hem** pozitif iki kök olması için, hem de negatif iki kök olması için diskriminant ve kökler çarpımı pozitif olması gerekiyor. Sadece kökler toplamında farklılık var. **Pozitif iki kök için kökler toplamı pozitif, negatif iki kök için ise negatif olması gerekiyor.**

Örnek Soru

$2x^2-3x-6=0$ **denkleminin köklerinin işareti hakkında ne söylenebilir?**

Çözelim☺
Köklerin işaretini incelerken ilk önce deltaya bakılır. Öyle ya bakalım ki kökleri reel (gerçek) mi? Bakalım.
$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2+4.2.(-6)=57>0$ olduğundan kökleri reelmiş.
İkinci olarak kökler çarpımına bakılır.
$x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}=\frac{-6}{2}=-3<0$
Kökler çarpımı negatif çıktı. Demek ki köklerin biri pozitif diğeri negatif.
Olayı daha da netleştirmek için kökler toplamına da bakalım.
$x_1+x_2=\frac{-6}{a}=\frac{-(-3)}{2}=\frac{3}{2}>0$
Pozitif çıktı.
Eee... Şimdi ne diycez?
Şöyle.
$x_1<0<x_2$ demek yetmez. Bir de şunu ilave etmek lâzım. $|x_1|<x_2$ Yani, negatif olan kökün mutlak değeri daha küçük.(Öyle ya kökler toplamı pozitif olacak☺)
Demek ki $x_1<0<x_2$ ve $|x_1|<x_2$ imiş.
Anladınız mı bu olayı?

Örnek Soru

$(m+1)x^2-3(m+2)x+4-m^2=0$

denkleminin biri pozitif diğeri negatif iki kökü olduğuna göre, m hangi değerleri alabilir?

Çözelim☺
En çok bunu soruyorlar. (Bir iki defa sorulmuş.☺)
Ters işaretli iki kök var. Bunun için kökler çarpımının negatif olması yeterli.
Kökler çarpımı, $x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}=\frac{4-m^2}{m+1}<0$ olmalı.
Artık bu eşitsizliği de bana çözdürmezsiniz herhalde?
Çözün bakalım.
Ne çıktı?
$(-2,-1)\cup(2,\infty)$ bulduysanız sıkıntı yok. Bulamadıysanız gidip tekrardan baştan adam gibi çalışın lütfen?

1. **Aşağıdaki denklemlerin hangisinin ters işaretli iki kökü vardır?**

A) $-x^2+7x-2=0$ B) $x^2-5x+2=0$
C) $2x^2+6x-3=0$ D) $9x^2-6x+1=0$
E) $x^2-2x+5=0$

2. **Aşağıdaki denklemlerin hangisinin pozitif iki kökü vardır?**

A) $2x^2+5x-2=0$ B) $x^2-2x+8=0$
C) $x^2+6x-3=0$ D) $5x^2+2x+4=0$
E) $x^2-6x+1=0$

3. **Aşağıdaki denklemlerin hangisinin mutlak değerce büyük olanı negatif olan iki reel kökü vardır?**

A) $-x^2+5x+2=0$ B) $3x^2-2x+1=0$
C) $x^2-4x+2=0$ D) $3x^2+2x-4=0$
E) $x^2+6x+1=0$

4. $3x^2-5x+4m-8=0$

denkleminin ters işaretli iki kökü olması için m hangi aralıktaki değerleri almalıdır?

5. $(m+2)x^2-5x+m-5=0$

denkleminin ters işaretli iki kökü olduğuna göre, m kaç farklı tam sayı değer alabilir?

6. m nin hangi aralıktaki değerleri için,

$mx^2+2(m+2)x+m-4=0$

denkleminin ters işaretli iki reel kökü olur?

7. $(2-m)x^2+5x+m^2-9=0$

denkleminin biri pozitif, diğeri negatif iki gerçek kökü olduğuna göre, m hangi değerleri alabilir?

8. $(m+2)x^2+6x-m+2=0$

denkleminin zıt işaretli iki kökü olduğuna göre m nin aralığı nedir?

9. $(k+2)x^2+3(k-1)x+2k-10=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$x_1<0<x_2$ ve $|x_1|>x_2$ **olduğuna göre, k nin değer aralığı nedir?**

10. $(m-1)x^2-(m-3)x+3m-12=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$x_1<0<x_2$ ve $|x_1|<|x_2|$ **olduğuna göre, m nin aralığı nedir?**

11. $(2a-6)x^2-(a+1)x+2a+4=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$x_1<0<x_2$ ve $|x_1|<|x_2|$ **olduğuna göre, a nin aralığı nedir?**

12. $x^2+4x+m-3=0$

denkleminin negatif iki gerçek kökü olduğuna göre, m ne olmalıdır?

13. $x^2-6x+p-2=0$

denkleminin pozitif iki gerçek kökü olduğuna göre, p ne olmalıdır?

14. m nin hangi aralıktaki değerleri için,

$mx^2-6x+m-8=0$

denkleminin pozitif iki reel kökü vardır?

PARABOL

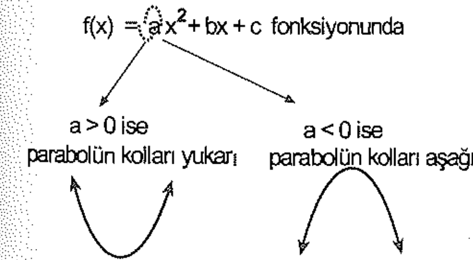
Bizde yalan yok. Parabol, abi ve ablalarınızın en çok zorlandığı konulardan biri☺
Ama sorun bakalım "Niye?" diye.
Because onların çoğunun fonksiyonlarında problemi vardı. İkinci dereceden denklemi adam gibi öğrenmemişler ve analitik manalitik de bilmiyorlardı. Bunun doğal sonucu olarak da pek çoğu bu konu gelince yamuluyordu☺
Neyse...Bu faslı geçelim.
Hep aynı şeyi söylüyorum.
İlk önce her konunun temel mantığını öğrenin. Gerisi kolay. Konunun mantığını öğrendikten sonra parabol bile çok kolay bir konu.☺

Parabol denen şey $f(x)=ax^2+bx+c$ fonksiyonunun grafiğidir.
Herhangi bir parabolü çizince aşağıda çizdiğim iki şekilden biri gibi bir şey çıkıyor. Kolları ya aşağı doğru ya da yukarı.



O halde bir parabolde bilmeniz gereken ilk husus kolların yönü. Kolların yönü a nın işaretiyle ilgili.

$f(x)=ax^2+bx+c$ fonksiyonunda



Parabol çizme olayına birazdan gelcez. Ama önce çok genel bir şeyi bir defa daha hatırlatıyim size. Olur ya. Unutmuş olabilirsiniz.☺

Bir fonksiyon grafiği (eğri) üzerindeki her noktanın koordinatları bu eğrinin denklemini sağlar.
Bu acayip önemli. Ona göre.☺

1. **A(2,6) noktası** $y=x^2+bx-6$ **fonksiyonunun grafiği üzerinde olduğuna göre, b kaçtır?**

2. $y=x^2+mx+2$ **eğrisi (1, 5) noktasından geçtiğine göre, m kaçtır?**

3. $f(x)=4x^2-2mx+5$

parabolünün üzerindeki bir nokta (1, m) olduğuna göre, m kaçtır?

4. $f(x)=x^2+c$

parabolü (1, 3) ve (2, k) noktalarından geçtiğine göre, k kaçtır?

Parabolün Eksenleri Kesim Noktaları

Aslında bütün fonksiyonlar için geçerli olan bir şeyi tekrardan söyleyeyim.
Bir fonksiyonun y eksenini kesim noktasını bulmak için denkleminde x yerine sıfır yazılır. x eksenini kestiği noktaları bulmak için ise y yerine sıfır yazılır.

Hatırlayın...
Herhangi bir fonksiyonda
x = 0 için y eksenini kesim noktasını,
y = 0 için de x ekenini kesim noktalarını buluyorduk.

Örnek Soru

$y = x^2 - 5x + 6$

parabolünün eksenleri kesim noktaları nedir?

Çözelim☺
Sadece parabolün değil bütün fonksiyonların eksenleri kestiği noktalar aynı şekilde bulunur.
y eksenini kestiği noktayı bulmak istiyorsanız x e sıfır verin.
Verelim. x = 0 için $y = 0^2 - 5.0 + 6 = 6$ olduğundan bu parabol y eksenini ordinatı 6 olan noktada keser.
x eksenini kesim noktasını bulmak için ise y ye sıfır verin.
Bakalım. x eksenini kestiği noktaların apsisleri
y = 0 için $0 = x^2 - 5x + 6$ eşitliğinden x = 2 ve x = 3 imiş.
Anlaşıldı mı?

5. $y = x^2 - 2x - 3$

parabolünün y eksenini kesim noktasının ordinatı kaçtır?

6. $y = x^2 + (b+1)x + 2c - 3$

parabolü y eksenini (0,7) noktasında kestiğine göre, c kaçtır?

7. $y = x^2 - 5x + 4$

parabolünün x eksenini kesim noktalarının apsisleri nedir?

8. $y = x^2 + x - 2$

parabolü x eksenini A ve B noktalarında kestiğine göre, $|AB|$ kaç birimdir?

9. $y = x^2 - 2x - 3$

parabolü koordinat eksenlerini hangi noktalarda keser?

10. $y = x^2 - 3x + 2$

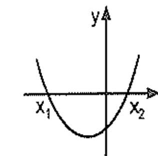
parabolünün eksenleri kesim noktaları A, B ve C olduğuna göre, ABC üçgeninin alanı kaç birim karedir?

1. $y = x^2 - 2x - 3$

eğrisinin x eksenini kesim noktaları x_1 ve x_2 olduğuna göre, $|x_1 - x_2|$ kaçtır?

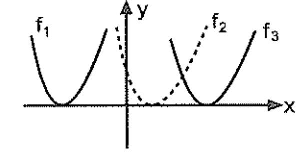
Her parabol y eksenini keser. Ve kesim noktasının ordinatı her zaman $y = ax^2 + bx + c$ deki c ye eşittir. Fakat x eksenini kesip kesmediğini öyle hemencecik söylemek kolay değil. (Sizi kastediyorum. Yoksa bay tecrübe için sıkıntı yok tabii ki☺)
Bir eğrinin x eksenini kesim noktalarını nasıl buluyorduk? Hatırlayın bi.
x eksenini kesim noktalarını bulurken y ye sıfır veriyordunuz değil mi?
Peki, y = 0 için $0 = ax^2 + bx + c$ oluyor.
Demek ki $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri parabolün x eksenini kestiği noktalarla aynıymış.
İyi de buradan x leri nasıl bulcaz?
Şimdiki olayımız da bu. Yani, parabol x eksenini ne zaman keser? Ne zaman teğet? Veya ne zaman kesmez? İşte bunlar Δ ile ilgili.
$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde
$\Delta = b^2 - 4ac > 0$ denklemin iki farklı reel kökü vardı.

Dolayısıyla parabol x eksenini iki farklı noktada keser ve denklemin kökleri parabolün x eksenini kestiği noktalardır.



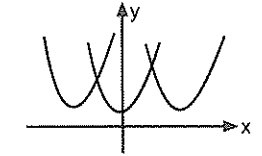
Meselâ üstteki parabolde, a > 0 (kollar yukarı doğru) ve Δ > 0 (x eksenini iki noktada kesiyor.)
$\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ise denklemin eşit (çakışık) iki kökü vardı.

Dolayısıyla parabol x eksenine teğettir. (Yani parabol x eksenine sadece bir defacık dokunacak o kadar☺)

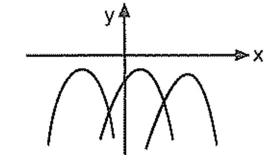


Meselâ üstteki parabollerde a > 0 ve Δ = 0 (paraboller x eksenine teğet)
Ayrıca şunu da söylemek lâzım.Bu parabollerden f_1 x eksenine negatif tarafta f_2 ve f_3 ise pozitif tarafta teğettir.

$\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ise denklemin reel kökü yoktu.
Dolayısıyla da parabol x eksenini kesmez.



Meselâ üsteki parabollerde a > 0 ve Δ < 0 dır. Ve her x değeri için f(x) pozitiftir.



Üsteki parabollerde ise a < 0 ve Δ < 0 dır. Ve her x değeri için f(x) negatiftir.

x eksenini kesmeyen parabollerden şu sonucu çıkarabilir misiniz?

Her x reel sayı değeri için,
$f(x) = ax^2 + bx + c > 0$ ise a > 0 ve Δ < 0 dır.
$f(x) = ax^2 + bx + c < 0$ ise a < 0 ve Δ < 0 dır.
Anlamadınız gibi.☺☺
Biliyorum. Biraz gıcık. Ama yapacak başka bir şey de yok. Adamlar sormuyor olsa hiç anlatmazdım☺.

2. Aşağıda denklemi verilen parabollerden hangileri x eksenini farklı iki noktada keser?

I. $y=x^2-6x+2$

II. $y=3x^2-4x+2$

III. $y=4x^2-12x+9$

IV. $y=-5x^2+x+3$

3. Aşağıda denklemi verilen parabollerden hangileri x ekseni kesmez?

I. $y=x^2-3x+3$

II. $y=-2x^2-4x+1$

III. $y=2x^2-5x+4$

IV. $y=9x^2+6x+1$

4. Aşağıdaki denklemi verilen paraboller x eksenine teğet olduğuna göre, m ve n kaçtır?

a) $y=x^2-4x+m$

b) $y=2x^2-4x+n+2$

5. Aşağıdaki denklemi verilen paraboller x eksenine teğet olduğuna göre, m ve n kaçtır?

a) $y=mx^2-6x+m$

b) $y=x^2+(2n-4)x+9$

6. $y=x^2+2x+m-3$

parabolü x eksenini farklı iki noktada kesmesi için m nin alabileceği değerlerin aralığı nedir?

7. m nin hangi pozitif tam sayı değeri için

$y=x^2+2x+3m-5$

parabolü x eksenini farklı iki noktada keser?

8. $y=x^2+4x+3a-6$

parabolü x eksenini farklı iki noktada kestiğine göre, a nın en büyük tam sayı değeri kaçtır?

9. $y=x^2-8x+3c+1$

parabolü x eksenine teğet olduğuna göre, c kaçtır?

1. b pozitif tam sayı ve

$y=x^2-2bx+3b$

parabolü x eksenine teğet olduğuna göre, b kaçtır?

2. $y=x^2+mx+m+3$

parabolü x eksenine pozitif tarafta teğet olduğuna göre, m kaçtır?

3. $y=x^2+2mx+m+6$

parabolü x eksenine negatif tarafta teğet olduğuna göre, m kaçtır?

4. $y=x^2-2mx+m+12$

parabolü x eksenine teğet olduğuna göre, m nin alabileceği değerler toplamı kaçtır?

5. $y=x^2-mx+m+8$

parabolü x eksenine teğet olduğuna göre, m nin alabileceği değerler çarpımı kaçtır?

6. $y=x^2-4x+c$

parabolü x eksenine teğet olduğuna göre, teğet noktasının apsisi kaçtır?

7. $y=x^2-(m+1)x+2m-1$

parabolü x eksenine teğet olduğuna göre, teğet noktasının apsisinin alabileceği değerler toplamı kaçtır?

8. $y=x^2-(k+3)x+9$

parabolü x eksenine negatif tarafta teğet olduğuna göre, teğet noktasının apsisi kaçtır?

9. Aşağıdaki ifadelerden hangileri x in her reel sayı değeri için (daima) pozitiftir?

I. $x^2 - 3x + 4$

II. $-2x^2 + x + 3$

III. $2x^2 + x + 1$

IV. $-x^2 + 7x - 1$

10. Aşağıdaki ifadelerden hangileri x in her reel sayı değeri için (daima) negatiftir?

I. $-3x^2 + 5x - 6$

II. $-4x^2 + 3x + 1$

III. $3x^2 - 2x + 5$

IV. $-2x^2 + 8x - 3$

11. Her x reel sayı değeri için

$$f(x) = x^2 + 6x + m$$

fonksiyonu pozitif olduğuna göre, m nin alabileceği en küçük tamsayı kaçtır?

12. Her x reel sayı değeri için

$$f(x) = -x^2 + mx - 4$$

fonksiyonu negatif olduğuna göre, m nin alabileceği değerlerin kümesi nedir?

13. Her x reel sayı değeri için

$$x^2 + 6x > 2a - 1$$

eşitsizliği doğru olduğuna göre, a nın alabileceği değerlerin aralığı nedir?

14. Her x reel sayı değeri için

$$-x^2 + 4x < m + 2$$

eşitsizliği doğru olduğuna göre, m nin alabileceği değerlerin aralığı nedir?

15. $x > 0$ olmak üzere,

$$f(x) = \frac{x^2 + mx + 4}{x} > 0$$

olduğuna göre, m kaç farklı tam sayı değer alabilir?

16. $x > 0$ olmak üzere,

$$f(x) = -x + 2m - \frac{9}{x}$$

fonksiyonu daima negatif olduğuna göre, m kaç farklı tam sayı değer alabilir?

Parabolün Tepe Noktası (Simetri Ekseni, En Büyük ve En Küçük Değeri)

$y = ax^2 + bx + c$ eğrisinin denkleminde bir iki ince ayar yaparak! $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$ eşitliğini elde edebilirsiniz. (Deneyin isterseniz.☺)

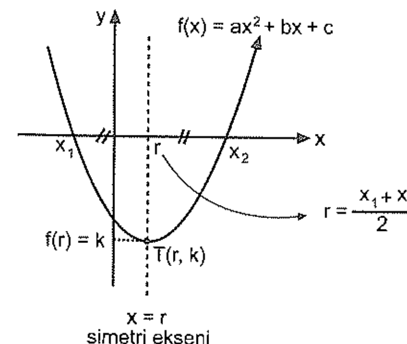
Şimdi bu fonksiyonun (parabolün) alabileceği en küçük ya da en büyük değeri nedir diye sorsam size☺

Hemencecik $x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-b}{2a}$ için $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$ dır dersiniz. Öyle değil mi? ☺

İşte parabol üzerindeki bu nokta (Yani, tepecik veya çukurcuk) T(r,k) olarak ifade edilir.

$T(r, k) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ dır.

Ve parabolün tepe noktası olarak bilinen nokta bu noktadır işte.
Anladınız mı şimdi tepe noktasının ne olduğunu?
Aslında biraz türev bilseydiniz belki de bu maceralara hiç girmeyecektim.
Ama yapabileceğim başka bir şey yok şimdilik.
Seviyenize göre anlatmaya çalışıyorum.☺
Parabolün tepesi neresi? Dibi neresi? diye sormazsınız herhalde☺
Aslında türevin geometrik yorumunu öğrendiğinizde parabolün tepe noktasıyla ilgili soruları ve alabileceği en büyük ve en küçük değerleri daha rahat bulabileceksiniz. Ama daha sonra işte☺ Şimdilik bununla idare edin☺
Olayı bir de şöyle irdeleyelim.
Önce aşağıdaki şekli inceleyin bi.



Aslında her parabol x eksenini kesecek diye bir kural yok. Ama ben parabolün tepe noktasını ve simetri eksenini rahat görebileceğiniz yahşi bi parabol çizdim☺

Bu parabol x eksenini iki noktada (x_1 ve x_2) kesmiş.
Biraz analitik biliyorsanız (ki bilmeniz lazım.)
Bu kesim noktalarının tam ortasındaki nokta tepe noktasının apsisidir. Ve bu noktadan geçen **x = r doğrusu da parabolün simetri eksenidir.**

Özetleyeyim.
Yani, r parabolün tepe noktasının apsisidir.

$$r = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-b/a}{2} = -\frac{b}{2a}$$

Ayrıca parabolün x = r için aldığı değer olan k değeri de parabolün tepe noktasının ordinatıdır.

Ve $k = f(r) = \frac{4ac - b^2}{4a}$ dır.
Şimdi anladınız mı?

Unutmayın...

$f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun alabileceği en büyük değer ($a < 0$ iken), ya da en küçük değer($a > 0$ iken) daima $k = f(r) = f\left(\frac{-b}{2a}\right)$ değeridir.

Örnek Soru

$f(x) = 2x^2 - 8x + 1$ parabolünün,

a) Tepe noktası nedir?

b) Simetri ekseninin denklemi nedir?

Çözelim☺
Parabolün tepe noktasına T(r, k) demiştik.
Tepe noktasının apsisi yani, r si kökler toplamının yarısıydı. Bu soruda $r = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-b/a}{2} = 2$ dir.
Tepe noktasının ordinatını yani k yı bulurken yapmanız gereken x = r = 2 için y nin kaç olduğunu bulmak.
O da x = 2 için $k = f(2) = 2.2^2 - 8.2 + 1 = -7$ dir.
Demek ki tepe noktası **T**(r, k) = **T**(2, – 7) imiş.
Simetri ekseni ise. Bulduk zaten☺
x = r doğrusuydu. Yani, x = 2 doğrusu.

1. **Aşağıdaki parabollerin tepe noktalarının apsisleri kaçtır?**

a) $y = x^2 - 4x + 2$

b) $y = -2x^2 + 12x - 5$

c) $y = -x^2 + 3x + 1$

d) $y = x^2 + 2x + 9$

2. $y = x^2 + (2m - 6)x - 4$

parabolünün tepe noktasının apsisi 4 olduğuna göre, m kaçtır?

3. $y = x^2 + (3b + 2)x + 1$

parabolünün tepe noktasının apsisi − 7 olduğuna göre, b kaçtır?

4. $y = mx^2 - (3m - 2)x + 4$

parabolünün tepe noktasının apsisi 2 olduğuna göre, m kaçtır?

5. **Aşağıdaki parabollerin tepe noktalarının koordinatları nedir?**

a) $y = x^2 - 4x + 2$

b) $y = -2x^2 + 12x - 5$

c) $y = -x^2 + 2x$

d) $y = 2x^2 - 9$

6. $y = x^2 - 6x + 2k + 1$

parabolünün tepe noktasının ordinatı 5 olduğuna göre, k kaçtır?

7. $y = x^2 - 2mx + 4m + 5$

parabolünün tepe noktasının ordinatı 8 olduğuna göre, m nin alabileceği en küçük değer kaçtır?

8. $y = x^2 + 2x - 8$

parabolünün tepe noktasının koordinatları nedir?

1. $y = -x^2 + 10x - 21$

parabolünün tepe noktasının koordinatları toplamı kaçtır?

2. $y = x^2 + 4x - 2$

parabolünün simetri ekseninin denklemi nedir?

3. $f(x) = mx^2 - (m + 15)x + 2$

parabolünün simetri ekseni x = 2 doğrusu olduğuna göre, m kaçtır?

4. $f(x) = x^2 - (m + 1)x - 3$

parabolünün simetri ekseni x − 3 = 0 doğrusu olduğuna göre, m kaçtır?

5. $y = x^2 - (m + 1)x + n + 2$

parabolünün tepe noktası T(2, 1) olduğuna göre, m.n çarpımı kaçtır?

6. $y = -x^2 + 4x + c$

parabolünün tepe noktası T(b, 4) olduğuna göre, b + c toplamı kaçtır?

7. $y = -x^2 + 2x + 3$

parabolünün tepe noktası T, x eksenini kesim noktaları A ve B olduğuna göre, ATB üçgeninin alanı kaç birim karedir?

x ekseni üzerindeki noktaların ordinatı sıfırdı. y ekseni üzerindekilerin ise apsisi. Öyle değil mi?☺

8. $y = x^2 - 4x + m - 2$

parabolünün tepe noktası x ekseni üzerinde olduğuna göre, m kaçtır?

9. $y = x^2 + (m-4)x - m + 3$

parabolünün tepe noktası y ekseni üzerinde olduğuna göre, m kaçtır?

10. $y = (m+1)x^2 + (m^2-1)x - 8$

parabolünün tepe noktası y ekseni üzerinde olduğuna göre, m kaçtır?

Hatırlayın.☺ Ne demiştik.

$ax^2 + bx + c$ ifadesinin en büyük (ya da en küçük. Fark etmiyor da☺) değerini bulurken x yerine $x = \frac{-b}{2a}$ değeri kaç ise o yazılır. Tamam mı?

11. $f(x) = x^2 - 4x + 2$

fonksiyonunun alabileceği en küçük değer kaçtır?

12. $f(x) = -x^2 - 6x + 5$

fonksiyonunun görüntü kümesinin en büyük elemanı kaçtır?

13. x reel sayısı için,

$x^2 + 2x + 5$

toplamının alabileceği en küçük değer kaçtır?

14. A reel sayısı için,

$-A^2 + 10A + 1$

ifadesinin en büyük değeri kaçtır?

15. $(16-2x)(x-2)$

çarpımının alabileceği en büyük değer kaçtır?

16. $a(2a-8)$

çarpımının en küçük değeri kaçtır?

1. **Kenar uzunlukları (12 – 2x) cm ve (x – 2) cm olan dikdörtgenin alanı en çok kaç cm^2 dir?**

2. $A = a^2 - 4a + 2$

$B = b^2 - 6b + 5$

olduğuna göre, A + B toplamı en az kaçtır?

3. $A = -a^2 + 2a - 5$

$B = b^2 + 4b + 10$

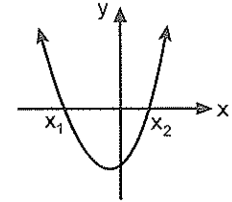
olduğuna göre, A – B farkının alabileceği en büyük değer kaçtır?

4. $(x+3)^2 + (x-7)^2$

toplamının alabileceği en küçük değer kaçtır?

Ox - Eksenini Kesim Noktaları Bilinen Parabolün Denklemi

Burada formül gibi bi şey verecem. Öğrenirsiniz artık. Kökleri verilen denklemi kurmak gibi bir şey bu. Diyelim ki parabolümüz x eksenini x_1 ve x_2 apsisli noktalarda kesiyor olsun. Bu parabolün bi denklemi var muhakkak. Şimdiki olayımız bunu yazmak. Meselâ şekli şöyle olabilir.



Bu şekilde x eksenini kesim noktaları belli olan parabol denklemi genel olarak $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ biçimindedir.

Burada x_1 ve x_2 yi zaten verecekler. Bunlarda bi sıkıntı yok. Bütün mesele a yı bulabilmek.

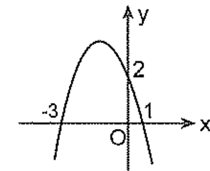
Pekii... Bu denklemdeki a yı nasıl bulacaksınız? Var mı bir fikriniz?

...?

Söyleyeyim. Ve siz de tekrar hatırlayın☺ a yı parabol üzerinde koordinatları bilinen bir nokta yardımıyla bulabilirsiniz.

Öyle ya parabol üzerindeki her noktanın koordinatları parabolün denklemini sağlaması gerekiyordu. Sadece parabolün de değil. Her eğrinin üzerindeki noktanın koordinatları o eğrinin denklemini sağlar. Bu arada parabolün de eğri olduğunu söylemeye gerek yok sanıyorum.☺

Örnek Soru



Şekilde eksenleri kesim noktaları verilen parabolün denklemi nedir?

Çözelim☺

Uzatmıyayım. Şekildeki parabolün x eksenini kesim noktalarından biri – 3 diğeri 1 verilmiş.

Bu değerlerden biri iks bir, diğeri iks iki olsun diyelim.☺

Bu $x_1 = -3$ ve $x_2 = 1$ değerlerini

$y = a(x - x_1)(x - x_2)$ denkleminde yerine yazarsanız $y = a(x+3)(x-1)$ i bulursunuz. Bulursunuz.

Ama bu yetmez tabii ki.☺a yı da bulmanız lâzım.

Hatırlayın. **"a yı parabol üzerindeki herhangi bir noktanın koordinatları yardımıyla bulabilirsiniz"** demiştim.

Bulalım bakalım kaçmış?

Şekildeki parabol x = 0 için y = 2 den geçiyor. Yani, (0, 2) noktası parabolün üzerinde.

Demek ki bu nokta parabolün denklemini sağlıyor.

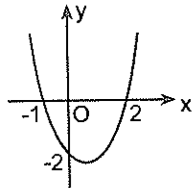
Sağlatalım bakalım.

$2 = a(0+3)(0-1)$ dan $a = \frac{-2}{3}$ ü bulur ve sonra da

parabolün denklemini $y = \frac{-2}{3}(x+3)(x-1)$ olarak ifade edersiniz artık.

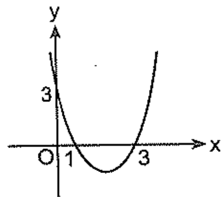
İsterseniz de parantezleri açar $y = \frac{-2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 2$ şeklinde ifade edersiniz.

5.



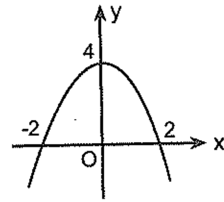
Şekilde eksenleri kesim noktaları verilen parabolün denklemi nedir?

6.



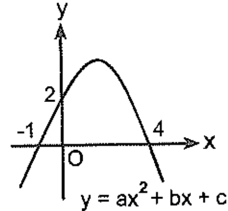
Şekilde eksenleri kesim noktaları verilen parabolün denklemi nedir?

7.



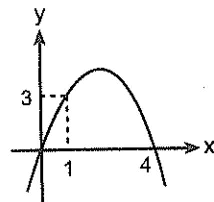
Şekilde eksenleri kesim noktaları verilen parabolün denklemi nedir?

8.



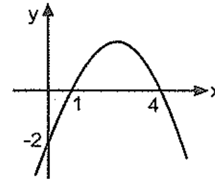
Şekilde $y = ax^2 + bx + c$ eğrisinin grafiği verilmiştir.
Buna göre, a + b + c toplamı kaçtır?

9.



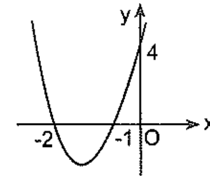
Şekilde eksenleri kesim noktaları verilen parabolün denklemi nedir?

1.



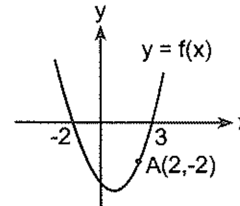
Şekilde eksenleri kesim noktaları verilen parabolün denklemi nedir?

2.



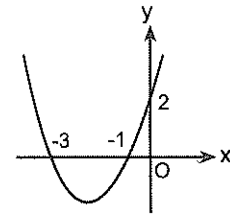
Şekilde $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.
Buna göre, f(1) değeri kaçtır?

3.



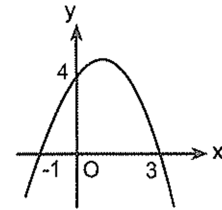
Şekilde $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.
Buna göre, f(1) değeri kaçtır?

4.



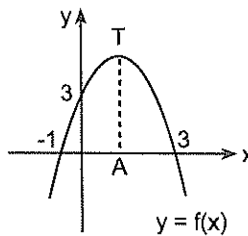
Şekilde grafiği verilen $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun alabileceği en küçük değer kaçtır?

5.



Şekilde grafiği verilen $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun alabileceği en büyük değer kaçtır?

6.



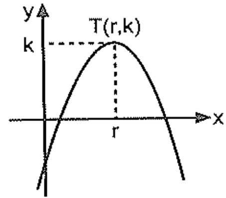
Şekilde grafiği verilen $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun tepe noktası T, tepe noktasının x ekseni üzerindeki dik izdüşümü A olduğuna göre, |AT| kaçtır?

Tepe Noktası Bilinen Parabolün Denklemi

Parabolün tepe noktasını ve bir de üzerindeki başka bir noktanın koordinatlarını verirlerse bu parabolün denklemini de yazabiliyoruz.
Nasıl olduğunu izah edeyim.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ eşitliğinin sağ tarafı üzerinde bir iki ince ayar yaptıktan sonra

$$f(x) = a\left(x + \underbrace{\frac{b}{2a}}_{-r}\right)^2 + \underbrace{\frac{4ac - b^2}{4a}}_{k}$$ eşitliğini elde etmiştik. Hatırladınız mı?☺
Zaten tepe noktası da T(r, k) değil miydi?



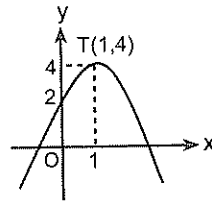
Anlayacağınız tepe noktası T(r,k) olan parabolün denklemini $f(x) = a(x-r)^2 + k$ şeklinde yazabilirsiniz.

Meselâ verilen parabolün denklemi,
$y = 3(x-2)^2 + 5$ ise tepe noktasının T(2,5)
$y = -(x+1)^2 - 3$ ise tepe noktasının T(–1,–3)
$y = 2(x-4)^2$ ise tepe noktasının T(4, 0) olduğunu hemencecik olmasa bile biraz antrenman yaptıktan sonra söyleyebilmeniz lâzım.
Değil mi ama?

Gerçi bu şekilde verilen parabol denklemleri açıp saçarak ve formülcükleri kullanarak da tepe noktasını bulabilirsiniz. Ama gerek yok bence. Çok da zor bir şey değil yani☺
Dediklerimi özetlersem. Eğer parabolde tepe noktası ve üzerindeki başka bir nokta daha verilirse bu parabolün denklemini $y = a(x-r)^2 + k$ olarak yazın ilk önce. Sonra a yı bulun. Ve r ile k yı da yerine yazarak denklemini yazın☺
Biliyorum. Söylemesi kolay da...☺

Tepe noktası T(r,k) olan parabolün denklemi $y = a(x-r)^2 + k$ biçiminde yazılabilir.
Ha! Bu arada a yı nasıl bulcanızı söylemiştim. Ama aklı başka yerde olanlar için tekrar söyleyeyim. ☺
Parabol üzerindeki her nokta parabolün denklemini sağlayacağından parabol üzerindeki herhangi bir noktanın koordinatlarını parabol denkleminde yerine yazıp öyle buluyorsunuz.
Örnek vermiycem. Ama anladınız mı şimdi ☺?

Örnek Soru



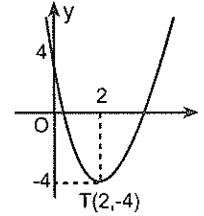
Şekilde grafiği verilen parabolün tepe noktası T(1,4) olduğuna göre, denklemi nedir?

Çözelim☺
Tepesi belli. T(r,k) = T(1,4) verilmiş. Tepesi belli olan parabol denklemi $y = a(x-r)^2 + k$ şeklindeydi. Burada r = 1 ve k = 4 imiş. İlk önce bu değerleri formülcükte yerine yazın ve denklemi
$y = a(x-1)^2 + 4$ olduğunu görün.
Sıra geldi a yı bulmaya. Bu parabol (0,2) den geçiyor mu?
Evet. Geçtiğine göre bu noktanın koordinatları parabolün denklemini sağlaması lâzım.
Yani, x = 0 için y = 2 oluyormuş.
$2 = a(0-1)^2 + 4$ ten $a = -2$ imiş.
Demek ki bu parabolün denklemi
$y = -2(x-1)^2 + 4$ imiş.

7. **Aşağıda denklemi verilen parabollerin tepe noktalarının koordinatları nedir?**

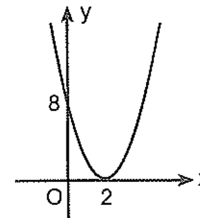
a) $y = 3(x-3)^2 + 5$
b) $y = -2(x+5)^2 + 2$
c) $y = 4(x-1)^2$
d) $y = -3x^2 + 6$

1.



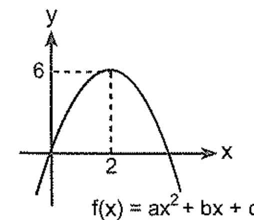
Şekilde grafiği verilen parabolün tepe noktası T(2,– 4) olduğuna göre, denklemi nedir?

2.



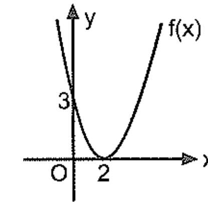
Şekilde grafiği verilen parabolün denklemi nedir?

3.



Şekilde $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiği verildiğine göre, f(1) kaçtır?

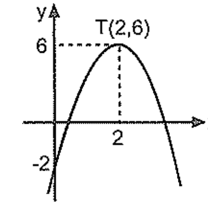
4.



f(x) fonksiyonunun grafiği, şekildeki gibi, Ox eksenine (2,0) noktasında teğet olan (0,3) noktasından geçen paraboldür.

Buna göre, f(1) kaçtır?

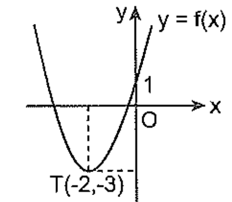
5.



Şekilde $f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolü verilmiştir.

Buna göre, f(3) kaçtır?

6.



Şekilde $f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolü verilmiştir.

Buna göre, (fof)(0) kaçtır?

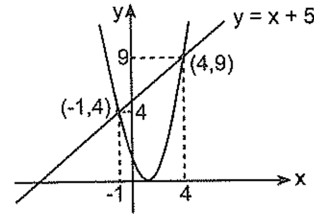
Bir Parabol İle Bir Doğrunun kesim noktası nasıl bulunur?

Ben bir parabol ile doğru dedim. Ama herhangi iki doğru ya da herhangi iki parabol bile olsa kesim noktaları aynı mantıkla bulunur.
Mantığı şu. İki fonksiyonun kesim noktasını bulmak için ortak çözüm yapılır.
Örnek üzerinde anlatayım.

Örnek soru

$y=x^2-2x+1$ **parabolü ile y = x + 5 doğrusunun kesim noktalarının koordinatları nedir?**

Çözelim☺
İki fonksiyonun (Parabol, doğru veya başka tür bir eğri olması önemli değil.) kesim noktasını her zaman şu şekilde bulacaksınız.
Bunun için ikisinin denklemlerini eşitleyin birbirine.
Yani, $x^2-2x+1=x+5$ eşitliğinden yeni bir denklem elde edin. Ve tabii daha sonra da bunu çözün.☺
Çözdüğünüzde neyi bulacaksınız? Biliyor musunuz?
Bu parabol ile doğrunun kesiştikleri noktaların apsislerini (yani, x lerini).
Çözün bakalım.
$x^2-2x+1=x+5$ denklemini düzenleyin ve
$x^2-3x-4=0$ denklemi elde edin. Ve bu denklemden de x = – 1 ve x = 4 ü bulun.
Şimdi bulduğunuz bu değerler kesim noktalarının apsisleridir.
Peki, kesim noktalarının ordinatlarını (y lerini) nasıl bulcaksınız? Var mı bi fikriniz?
Çok kolay ki☺
Bu x değerlerini iki denklemden hangisinde canınız isterse onda yerine yazın yeter. (Korkmayın. İkisi de aynı çıkar. ☺)
Yazın bakalım.
x = – 1 için y = 4 olduğundan kesim noktalarından biri (– 1,4) ve x = 4 için y = 9 olduğundan diğeri de (4,9) dur.
Grafikte de görmek isterseniz şöyle bir şey.



Sizin grafikleri çizmenize gerek yok. Ama ne yaptığınız görün istedim☺

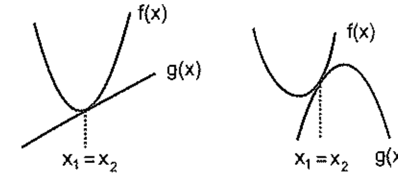
7. $f(x)=x^2-2$ **parabolü ile g(x) = x doğrusunun kesim noktalarının apsisleri toplamı kaçtır?**

8. $y=-x^2+x+1$ **parabolü ile y = – 2x + 1 doğrusunun kesim noktalarının koordinatları nedir?**

9. $y=x^2+1$ **parabolü ile** $y=-x^2+x+2$ **parabolünün kesim noktalarının koordinatları nedir?**

10. $y=3x^2+x-1$ **parabolü ile** $y=-x^2+x+3$ **parabolünün kesim noktalarının koordinatları nedir?**

Parabol ile doğru (veya iki parabol) birbirine teğet ise ortak çözüm denkleminde Δ = 0 dır.



Ve bu denklemin kökü parabol ile doğrunun teğet olduğu noktanın apsisidir.

1. $y=x^2-x+1$ **parabolü ile y = x + c doğrusu teğet olduğuna göre, c kaçtır?**

2. $y=ax^2$ **parabolü ile y = 2x – 1 doğrusu teğet olduğuna göre, a kaçtır?**

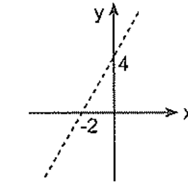
3. $y=ax^2+2$ **parabolü ile y = 2x + 1 doğrusu teğet olduğuna göre, teğet noktasının apsisi kaçtır?**

İki bilinmeyenli eşitsizliklerin Çözümü

Önce şunu söyleyelim.

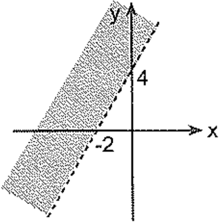
Her doğru (veya eğri) düzlemi iki bölgeye ayırır. (Bir de doğrunun ya da eğrinin kendisi var tabii ki.)
İki bilinmeyenli bir eşitsizliğin çözümünü yaparken ilk önce grafikleri eşitsizlik değil de eşitlik varmış gibi çizmek lâzım. (Ama f(x) < 0 ya da f(x) > 0 ise grafik kesik kesik çizilir. Ona göre.)

Sonra da grafiğin üzerinde olmayan herhangi bir noktanın (tercihen (0,0) noktası) eşitsizliği sağlayıp sağlamadığına bakılır. Sağlıyorsa bu noktanın olduğu taraf, sağlamıyorsa diğer taraf çözümdür.(Çözüm olan yer taranır.)
Örnek üzerinde göstereyim.
Örneğin
Diyelim ki y – 2x – 4 > 0 eşitsizliğini sağlayan noktalar koordinat düzleminde göstermek istiyoruz.
Adım adım gidelim.
İlk önce eşitsizliği boş verin☺ y – 2x – 4 = 0 doğrusunun grafiğini çizin. (yalnız bir şeye dikkat edin. Eşitsizlik… < 0 , ,… > 0 şeklinde olursa grafiği kesikli çizeceksiniz. …≥ 0, …≤ 0 şeklinde olursa düz.)
Şunu çizmiş olmanız lâzım.



Diyelim ki bunu çizdiniz. Bundan sonra?
Bundan sonra doğrunun bir tarafını tarayacaksınız.
Ama ne tarafını?
Şimdi söyleyeceğim şey acayip önemli. **Doğrunun bir tarafındaki noktaların hepsi bu eşitsizliği sağlar. Diğer tarafındakilerin ise hiç biri sağlamaz.** Onun için seçtiğiniz herhangi bir noktanın koordinatlarını (Benim tercihim genelde (0,0) noktası) bu eşitsizlikte yerine yazın ve eşitsizliği sağlayıp saplamadığına bakın. Sağlıyorsa seçtiğiniz noktanın tarafını, sağlamıyorsa diğer tarafını tarayın.
Bakalım (0, 0) bu eşitsizliği sağlıyor mu?
x = 0 ve y = 0 ı y – 2x – 4 > 0 da yerine yazın bakalım. 0 – 2.0 – 4 > 0 mı?
Ne alâka – 4 > 0 ☺
Yanlış.

Böyle bir şey olamayacağına göre demek ki (0, 0) noktasının koordinatları bu eşitsizliği sağlamıyor. Onun için (0,0) ın olduğu tarafı değil diğer tarafı tarıycaz. Sağlasaydı o tarafı tarıycaktık.
Son tahlilde eşitsizliğin çözümü koordinat düzleminde şöyle olacak.

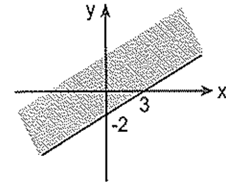


Gerçi test sorularında bu kadar uğraşmanıza gerek olmayacak.
Diyelim ki test sorusunda üstteki taralı bölgenin hangi eşitsizliğe ait olduğu sorulmuş olsun.
Şıkları da şöyle verilmiş olsun.

A) $x + 2y - 4 < 0$ B) $2x - y + 4 \le 0$
C) $2x - y - 4 \ge 0$ D) $x + 2y - 4 > 0$
E) $x - 2y \ge 0$

Bakmanız gereken ilk şey doğru kesik kesik çizilmiş. Dolayısıyla eşitsizlik < veya > şeklinde olacak. İkincisi (0,0) taralı tarafta olmadığı için bu eşitsizliği sağlamıyor. Onun için cevap da şıklarda (0,0) ın sağlamadığı seçeneklerden biri olabilir.
Bir de doğruya ait denklemin ne olduğuna dikkat edin. Bunun için eksenleri kesim noktalarına bakmanız yeterli.
Çözelim mi?
İlk önce doğru kesikli olduğu için eşitsizlik < veya > şeklinde olacak. Dolayısıyla B, C ve E şıkları gitti. ☺ Kaldı A ve D. Bir de şuna bakın. (0,0) bunlardan hangisini sağlıyor. A yı. O halde cevap A. ☺

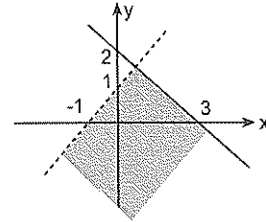
4.



Şekildeki taralı bölge aşağıdaki eşitsizliklerden hangisinin çözüm kümesidir?

A) $2x + 3y > 6$ B) $2x - 3y \le 6$
C) $3x - 2y \le 12$ D) $x + 2y > 6$
E) $3x - 2y \ge 0$

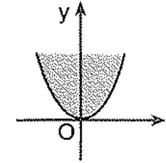
5.



Şekildeki taralı bölge aşağıdaki eşitsizlik sistemlerinden hangisinin çözüm kümesidir?

A) $2x + 3y \le 6$, $x + y < 1$
B) $2x + 3y \le 6$, $x - y > 1$
C) $2x + 3y - 6 \le 0$, $x - y + 1 > 0$
D) $x + 2y > 6$, $x - y - 1 > 0$
E) $3x - 2y - 6 \ge 0$, $x + y - 1 > 0$

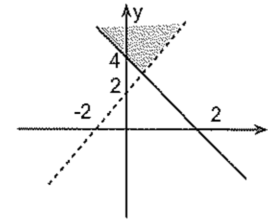
1.



Şekildeki taralı bölge aşağıdaki eşitsizliklerden hangisinin çözüm kümesi olabilir?

A) $y - x^2 > 1$ B) $y - x^2 \ge 0$
C) $y - x^2 \le 0$ D) $y - x^2 + 1 \ge 0$
E) $y + x^2 - 1 \le 0$

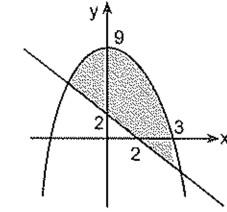
2.



Şekildeki taralı bölge aşağıdaki eşitsizlik sistemlerinden hangisinin çözüm kümesidir?

A) $x + 2y \le 8$, $x + y < 2$
B) $2x + y \le 4$, $x - y > 1$
C) $2x + y - 4 \ge 0$, $x - y + 2 < 0$
D) $x + 2y > 4$, $x - y - 1 > 0$
E) $x - 2y - 4 \ge 0$, $x + y - 1 > 0$

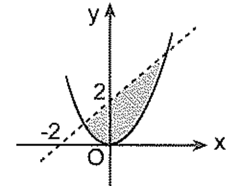
3.



Şekildeki taralı bölge aşağıdaki eşitsizlik sistemlerinden hangisinin çözüm kümesidir?

A) $x + y \le 2$, $y - x^2 + 9 \le 0$
B) $x + y \ge 2$, $y + x^2 \le 9$
C) $x + y - 4 \ge 0$, $y - x^2 - 9 \le 0$
D) $x + 2y > 2$, $y - x^2 + 9 \le 0$
E) $x - 2y - 2 \ge 0$, $y + x^2 - 9 \le 0$

5.



A) $x - y \le 2$, $y - x^2 + 9 \le 0$
B) $x - y + 2 > 0$, $y \ge x^2$
C) $x + y - 4 \ge 0$, $y \le x^2$
D) $x + 2y > 2$, $y \le x^2 + 2$
E) $x - y - 2 \ge 0$, $y \ge x^2$

6. $3x - 2y - 6 \geq 0$

eşitsizliğini sağlayan noktaları koordinat düzleminde gösteriniz.

7. $2x + y - 4 \leq 0$

$x - y + 2 \geq 0$

eşitsizlik sistemini sağlayan noktaları koordinat düzleminde gösteriniz.

8. $y \leq x^2 - 1$

eşitsizliğini sağlayan noktaları koordinat düzleminde gösteriniz.

9. $y > -x^2 + x + 2$

eşitsizliğini sağlayan noktaları koordinat düzleminde gösteriniz.

10. $y > -x^2 + 4$

$x + y - 2 \leq 0$

eşitsizlik sistemini sağlayan noktaları koordinat düzleminde gösteriniz..

11. $x > 0$

$y \geq x^2 - 4$

eşitsizlik sistemini sağlayan noktaları koordinat düzleminde gösteriniz.

Trigonometri

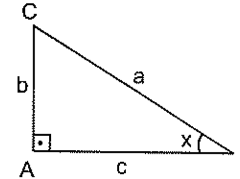
İlim ilim demektir,
ilim kendin bilmektir.
Sen kendini bilmezsen
bu nice okumaktır.
Yunus Emre

TRİGONOMETRİ

Trigonometri acayip önemli bir konu.
Ama şimdi size desem ki bu konuyla tarih boyunca bir sürü adam ilgilenmiş. İnanmayacaksınız☺Meselâ adamın birine astronomi ile ilgili çalışma yaparken lazım olmuş. Bir başkasına radyo dalgalarıyla uğraşırken, bir başkasına bilmem ne yaparken lazım olmuş. Bir sürü yerde lâzım olmuş anlayacağınız.
Ama çok iyi biliyorum ki size, "Bu konudan sınavda soru gelmez." desem. Aha da şimdi kapatırsınız bu sayfayı. ☺
Ama geliyor işte. Hem de bir sürü. Ona göre.☺
Neyse...

Bu konuda bilmeniz gereken ilk şey şu.
Dik Üçgende Dar Açıların Trigonometrik Oranları

Bu konuda en çok karşılaşacağınız kavramlar sin, cos, tan ve cot diye kısaltılmış olan oranlar.
Bilginiz vardır.☺ sin = sinüs, cos = cosinüs, tan = tanjant ve cot = cotanjant olarak kısaltılmış.
İşte trigonometrik oranlar:



x açısına göre, c komşu dik kenar, b karşı dik kenar ve a hipotenüstür.

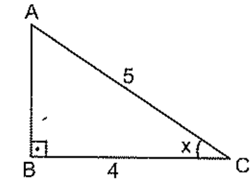
$$\sin x = \frac{\text{karşı dik kenar}}{\text{hipotenüs}} = \frac{b}{a}$$

$$\cos x = \frac{\text{komşu dik kenar}}{\text{hipotenüs}} = \frac{c}{a}$$

$$\tan x = \frac{\text{karşı dik kenar}}{\text{komşu dik kenar}} = \frac{b}{c}$$

$$\cot x = \frac{\text{komşu dik kenar}}{\text{karşı dik kenar}} = \frac{c}{b}$$

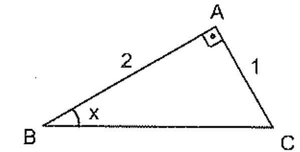
1.



Şekildeki dik üçgende verilenlere göre aşağıdaki trigonometrik oranlar kaça eşittir?

a) sinx
b) tanx
c) cosx
d) cotx

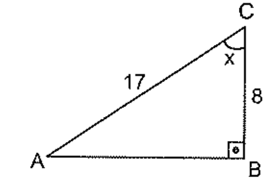
2.



Şekildeki dik üçgende verilenlere göre aşağıdaki trigonometrik oranlar kaça eşittir?

a) sinx
b) tanx
c) cosx
d) cotx

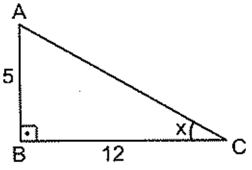
3.



Şekildeki dik üçgende verilenlere göre aşağıdaki trigonometrik oranlar kaçtır?

a) sinx
b) tanx
c) cosx
d) cotx

4.



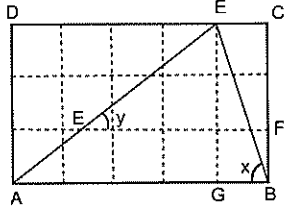
Şekildeki üçgende verilenlere göre aşağıdaki işlemleri yapınız.

a) sinx + cosx

b) tanx – cotx

c) $\dfrac{\sin x + \cos x}{\tan x}$

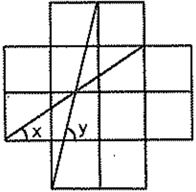
5.



Yukarıdaki şekil özdeş 15 kareden oluşmuştur.

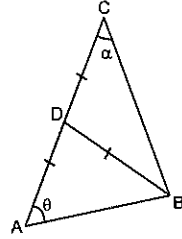
Buna göre, $\dfrac{\tan x}{\sin y}$ oranı kaçtır?

6. Aşağıdaki şekil 12 eş kareden oluşmaktadır.



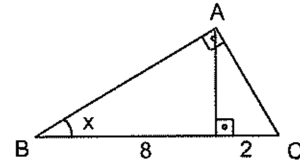
Buna göre, tanx + coty toplamı kaçtır?

7. Aşağıdaki üçgende |AD| = |DC| = |BD| dir.



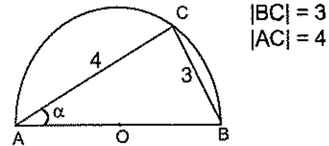
$\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ **olduğuna göre, sinθ nın değeri kaçtır?**

8.



Şekilde verilenlere göre, tanx kaçtır?

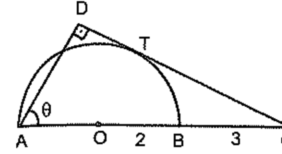
9.



Yukarıda AB çaplı yarım çember verilmiştir.

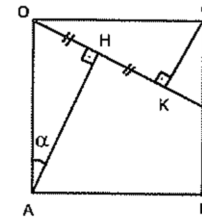
Buna göre, sinα kaçtır?

1. Aşağıda verilen [DC], **T** noktasında [AB] çaplı yarım çembere teğettir.



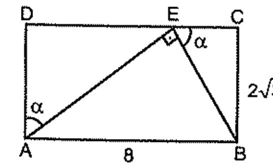
Buna göre, cosθ nın değeri kaçtır?

2. Aşağıdaki şekilde ABCD bir karedir.



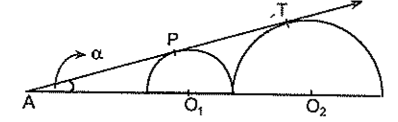
Şekilde verilenlere göre, cosα kaçtır?

3. Aşağıda ABCD bir dikdörtgendir.



Şekilde verilenler göre, tanα nın değeri kaçtır?

4.



AT doğrusu sırasıyla P ve T noktalarında O_1, O_2 merkezli yarım çemberlere teğettir. O_1 merkezli çemberin yarıçapı O_2 merkezli çemberin yarıçapının yarısıdır.

Buna göre, sinα değeri kaçtır?

Trigonometrik oranlardan birini biliyorsanız diğerlerini de bulabilirsiniz.

Bir dar açının trigonometrik oranı verilmişse bu orana uygun güzel bi dik üçgen çizip verilenleri yerine yerleştirin.

Örnek Soru

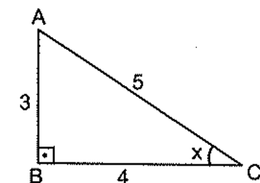
x dar açı olmak üzere,

$\cos x = \dfrac{4}{5}$

olduğuna göre, tanx kaçtır?

Çözelim☺

x dar açı ve cos değeri verilmiş. Bu tür sorularda ilk önce bir dik üçgen çizin ve verilen orana uygun olarak değerleri yerleştirin. Sonra bilinmeyen kenar uzunluğunu da bulun.
Hatırlayın. cosx neydi? Komşu dik kenar bölü hipotenüs.
Komşu dik kenarı 4, hipotenüsü 5 olan dik üçgen çizcez.
Meselâ şöyle bir üçgen çizebilirsiniz. (Bu arada |AB| = 3 olduğunu bulacaksınız.)



Gerisi kolay. Sorulan tanx in değeri. Artık $\tan x = \dfrac{3}{4}$ ü bulursunuz.

5. x dar açı olmak üzere,

$\sin x = \frac{3}{5}$

olduğuna göre, tanx kaçtır?

6. x dar açı olmak üzere,

$\cot x = \frac{5}{12}$

olduğuna göre, sinx kaçtır?

7. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere,

$\tan x = 2\sqrt{2}$

olduğuna göre, cosx kaçtır?

8. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere,

$\sin x = \frac{3}{5}$

olduğuna göre, $\frac{\tan x + \cos x}{\sin x}$ kaçtır?

9. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere,

$\cos x = \frac{2}{3}$

olduğuna göre, $\tan^2 x + \cot^2 x$ kaçtır?

10. x dar açı olmak üzere,

$\tan x = \frac{1}{2}$

olduğuna göre, $\frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}$ kaçtır?

11. x dar açı olmak üzere,

$\cot x = 3$

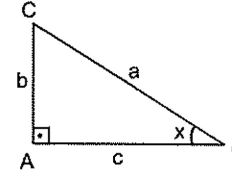
olduğuna göre, $\frac{\cos x - \sin x}{\sin x}$ kaçtır?

12. x dar açı olmak üzere,

$\tan x = \frac{4}{3}$

olduğuna göre, $\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{1 - \sin x \cos x}$ kaçtır?

Dik üçgendeki trigonometrik oranlar yardımıyla şu sonuçları çıkarabilirsiniz.



Şu yazdığım eşitliklerin doğru olduğunu görün isterseniz.

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

Bu sonuçları kullanarak aynı açıya ait tanjant ve kotanjant değerleri çarpımının 1 olduğunu görmüşsünüzdür.☺

$\tan x \cdot \cot x = 1$ dir.

Ve bu eşitlikten de $\tan x = \frac{1}{\cot x}$ ve $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ olduğunu görebilirsiniz.☺

Aklınızda olsun. Özellikle sadeleştirme sorularında tanx yerine sin bölü cos, cotx yerine de cos bölü sin yazmak kolaylık sağlayabilir☺

Çok fazla karşılaşmazsınız. Ama bir de şu var.

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$ $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$

Bu ikisi genellikle sadeleştirmelerde lâzım oluyor.

1. $3\sin x = 2\cos x$

olduğuna göre, cotx kaçtır?

2. x dar açı olmak üzere,

$\frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x} = \frac{3}{2}$

olduğuna göre, cotx kaçtır?

3. x dar açı olmak üzere,

$\frac{\cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{3}{5}$

olduğuna göre, cotx kaçtır?

4. x dar açı olmak üzere,

$\frac{2\cos x}{3\sin x + 4\cos x} = \frac{1}{4}$

olduğuna göre, tanx kaçtır?

5. $\frac{\tan 30^\circ . \cot 30^\circ}{2\tan 15^\circ \cdot \cot 15^\circ}$

işleminin sonucu kaçtır?

6. $\frac{1 + \tan^2 x}{1 + \cot^2 x}$

ifadesinin en sade biçimi nedir?

7. $\tan x - \cot x = 2$

olduğuna göre, $\tan^2 x + \cot^2 x$ **toplamı kaçtır?**

Dik üçgenden çıkarabileceğiniz bir diğer önemli sonuç $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ dir. Yani aynı açının sinüs ve cosinüsünün kareleri toplamı daima 1 e eşittir. Yine bu özdeşlikten hareketle

$1 - \sin^2 x = \cos^2 x$ ve $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$ eşitliklerinin yazılabileceğini görün.

Sorularda $\sin^2$.. ve $\cos^2$.. görürseniz hemen aklınıza $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ olduğu gelsin. Ok☺

8. $\dfrac{\sin^2 \frac{4\pi}{7} + \cos^2 \frac{4\pi}{7}}{\sin^2 x + \cos^2 x}$

işleminin sonucu kaçtır?

9. $1 - \sin^2 x - \cos^2 x$

işleminin sonucu nedir?

10. $\dfrac{1}{\sin^2 x} - 1$

ifadesinin en sade biçimi nedir?

11. $\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{\tan^2 x}$

ifadesinin en sade biçimi nedir?

12. $\dfrac{2 - 2\sin^2 x}{\cos^2 x}$

işleminin sonucu nedir?

13. $\dfrac{2\sin^2 x + 3\cos^2 x - 2}{1 - \sin^2 x}$

işleminin sonucu nedir?

1. $(1 - \cos^2 x)(1 + \cot^2 x)$

ifadesinin en sade biçimi nedir?

2. $\dfrac{\sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ}{\tan 10^\circ . \cot 10^\circ}$

işleminin sonucu kaçtır?

3. $\dfrac{4\cos^2 x - 5\sin^2 x}{8 - 18\sin^2 x}$

işleminin sonucu nedir?

4. $\dfrac{6\cos^2 x - 3\sin^2 x}{\cos^2 x - 2\sin^2 x + 1}$

işleminin sonucu nedir?

5. $\dfrac{(\sin x + \cos x)^2}{\cos x} - 2\sin x$

ifadesinin en sade biçimi nedir?

6. $\sin x . \cos x = a$

olduğuna göre, $(\sin x + \cos x)^2$ **ifadesinin eşiti nedir?**

7. $\tan x + \dfrac{\cos x}{1 + \sin x}$

ifadesinin en sade biçimi nedir?

8. $\sin^2 36^\circ + \cos^2 36^\circ + 2\tan\frac{\pi}{5} \cdot \cot\frac{\pi}{5}$

işleminin sonucu kaçtır?

9. $\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{1+\cos x}{\sin x}$

ifadesinin en sade biçimi nedir?

10. $\sin x+\cos x=\frac{3}{2}$

olduğuna göre, sinx.cosx çarpımı kaçtır?

11. $\sin x-\cos x=\frac{1}{3}$

olduğuna göre, 2sinx.cosx işleminin sonucu kaçtır?

Toplamları 90° olan iki açıdan (tümler iki açıdan) birinin sinüsü diğerinin kosinüsüne, birinin tanjantı diğerinin kotanjantına eşittir. Meselâ,
$\sin 25° = \cos 65°$
$\tan 20° = \cot 70°$
$\cos 6° = \sin 84°$ ye eşittir. Çoğaltabilirsiniz bunları.
Yine aynı şekilde
$\sin^2 40° = \cos^2 50°$
$\cos^2 54° = \sin^2 36°$ yazılabilir.

12. $\sin^2 55° + \tan 12°.\tan 78° + \sin^2 35°$

işleminin sonucu kaçtır?

13. $\sin^2 30° + \sin^2 40° + \sin^2 50° + \sin^2 60°$

işleminin sonucu nedir?

14. $\sin^2 \frac{3\pi}{7} + \sin^2 \frac{\pi}{14}$

işleminin sonucu kaçtır?

15. $\frac{\sin 24°}{\cos 66°}+\frac{\tan 40°}{\cot 50°}$

işleminin sonucu kaçtır?

1. $\tan\frac{2\pi}{5}\cot\frac{\pi}{10}+\cos^2\frac{5\pi}{16}+\cos^2\frac{3\pi}{16}$

işleminin sonucu kaçtır?

2. $\frac{\sin 12° + \cos 78°}{\sin 12°}$

ifadesinin eşiti kaçtır?

3. $\frac{\tan 15° + \cot 75°}{\tan 15°}$

ifadesinin eşiti kaçtır?

4. $\frac{\cot 20° - 2\tan 70°}{\tan 70°}$

ifadesinin eşiti kaçtır?

5. $\frac{\cot 20° \cdot \cot 70°}{\sin^2 70° + \sin^2 20°}$

işleminin sonucu kaçtır?

6. $x+y=\frac{\pi}{2}$ olmak üzere,

$\sin x=\frac{3}{5}$

olduğuna göre, cosy kaçtır?

7. $x+y=\frac{\pi}{2}$ olmak üzere,

$\sin x=\frac{3}{5}$

olduğuna göre, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)$ kaçtır?

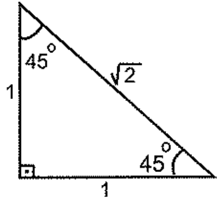
8. $x=\frac{\pi}{2}-y$ olmak üzere,

$\tan y=\frac{1}{3}$

olduğuna göre, cotx kaçtır?

30° , 45° ve 60° nin Trigonometrik Oranları

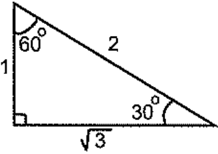
En önemli yerlerden birindesiniz. Bu açıların sin, cos, tan ve cot değerlerini bulmak için dik üçgen çizmek lâzım.
45 ° için dik kenar uzunlukları 1 birim olan dik üçgen çizin. Sonra da istenen trigonometrik oranları yazın. Ama antrenmanları yaparsanız bir süre sonra bunları ezberlediğinizi göreceksiniz. 45 ° için çizceniz üçgen şu:



$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan 45^\circ = \cot 45^\circ = 1$

30° ve 60° nin trigonometrik oranlarını bulmak için ise dik kenar uzunlukları 1 birim ve $\sqrt{3}$ birim olan bir dik üçgen çizin. Gerisi kolay.☺



$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 30^\circ = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan 60^\circ = \cot 30^\circ = \sqrt{3}$

Bu değerler o kadar çok yerde lâzım olacak ki. Konu ilerledikçe bunu daha iyi anlayacaksınız. Onun için bu kısmı adam gibi halletmek lâzım. Bence bu üçgenleri birkaç defa çizin ve üzerine uzunlukları yerleştirerek sin, cos, tan ve cot değerlerini yazarak bu işte pratikleşin.
Eğer trigoda ilerleyeceksiniz dediklerimi dikkate almanız gerek.

9. $\dfrac{\sin 30^\circ + \cos 60^\circ}{\sin 45^\circ}$

işleminin sonucu kaçtır?

10. $\dfrac{\sin 45^\circ + \cos 45^\circ}{\cos 60^\circ}$

işleminin sonucu kaçtır?

11. $\dfrac{\tan 60^\circ + \cot 30^\circ}{\sin 60^\circ}$

işleminin sonucu kaçtır?

12. $\dfrac{\sin 45^\circ . \cos 30^\circ}{\tan 45^\circ . \cot 60^\circ}$

işleminin sonucu kaçtır?

1. $\dfrac{\tan^2 60^\circ + \cos 60^\circ}{\sin^2 45^\circ}$

işleminin sonucu kaçtır?

2. $\sin^2\frac{\pi}{3} + \cos^3\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$

işleminin sonucu kaçtır?

3. $\sin^2 60^\circ + \tan 45^\circ + \cot^4 30^\circ$

toplamı kaça eşittir?

4. $\sqrt{\cot 45^\circ + \tan^2 60^\circ} - \dfrac{\sin 60^\circ}{\tan^2 30^\circ}$

işleminin sonucu kaçtır?

5. $\dfrac{\tan 45^\circ + 2\cos 60^\circ}{2\sin 30^\circ + \cot 45^\circ}$

işleminin sonucu kaçtır?

6. $\dfrac{\sin 30^\circ + 1}{\cos 60^\circ - 1}$

işleminin sonucu kaçtır?

7. $\dfrac{\sin 60^\circ + \cos 30^\circ}{2\tan 60^\circ \cdot \tan 45^\circ}$

işleminin sonucu kaçtır?

8. $\dfrac{\cos 45^\circ . \sin 45^\circ}{\sin 30^\circ + \cos 60^\circ}$

işleminin sonucu kaçtır?

9. $\dfrac{\cos 60^\circ + \tan 45^\circ}{\sin 45^\circ . \cos 30^\circ}$
işleminin sonucu kaçtır?

10. $\sqrt{5\sin 30^\circ + 3\cos 60^\circ}$
ifadesinin değeri kaçtır?

11. $\dfrac{\sin 60^\circ + \cos 30^\circ}{\cos 45^\circ}$
işleminin sonucu kaçtır?

12. $\sqrt{5 - \tan\frac{\pi}{4}} + \sqrt{1 + \tan^2\frac{\pi}{3}}$
işleminin sonucu kaçtır?

13. $\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6} - \tan\frac{\pi}{3}$
işleminin sonucu kaçtır?

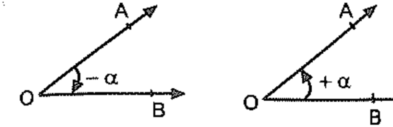
14. $\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^x = 4$
olduğuna göre, x kaçtır?

15. $\left|\sin\frac{\pi}{6} - \tan\frac{\pi}{4}\right|$
ifadesinin değeri kaçtır?

16. $\sin^2\frac{\pi}{3} + \cot\frac{\pi}{4}$
işleminin sonucu kaçtır?

Pozitif yönlü açı ve negatif yönlü açı

Açının pozitif veya negatif yönlü olması okun yönüyle belli olur. Saat ibresinin dönme yönündeki açılara **negatif yönlü** açı, saat ibresinin dönme yönünün tersi yöndeki açılara **pozitif yönlü** açı denir.



Açı Ölçü Birimleri

Derece

Bir çember yayının tamamını gören merkez açı 360° dir. 360 parçasından birine ise **1 derece (1°)** denir.

Radyan

Bir çember yayının tamamını gören merkez açı 2π raydandır.

Derece ile radyan arasında $\dfrac{\text{Derece}}{180^\circ} = \dfrac{\text{Radyan}}{\pi}$ eşitliği yazılabilir.

Aslında radyan olarak verilen bir açıyı derece cinsinden yazmak çok kolay **π radyan = 180°** olduğundan π yerine 180° yazarsınız olur biter☺

1. **Ölçüsü 90° olan açının ölçüsü kaç radyandır?**

2. **Ölçüsü 120° olan açı kaç radyandır?**

3. **Ölçüsü 144° olan açı kaç radyandır?**

4. **Ölçüsü 225° olan açı kaç radyandır?**

5. **Ölçüsü 150° olan açı kaç radyandır?**

6. **Ölçüsü $\frac{\pi}{2}$ radyan olan açı kaç derecedir?**

7. **Ölçüsü $\frac{2\pi}{3}$ radyan olan açı kaç derecedir?**

8. **Ölçüsü $\frac{3\pi}{4}$ radyan olan açı kaç derecedir?**

9. **Ölçüsü $\frac{5\pi}{9}$ radyan olan açı kaç derecedir?**

Esas Ölçü

Trigonometride açılar genellikle 0° ile 360° arasında ifade edilir. Ki çember üzerinde rahatlıkla gösterilebilsin. Birim çember üzerinde bitim noktaları aynı olan açılardan ölçüsü [0°, 360°) veya [0, 2π) aralığında olan açıya, bu açıların **esas ölçüsü** denir.
Esas ölçü 0° ile360° (veya 0 ile 2π radyan) arasındadır.

Esas Ölçü Nasıl Bulunur?

Pozitif yönlü açıların esas ölçüsü

360° den büyük bir açının esas ölçüsünü bulurken verilen açının ölçüsünü 360 a bölün. Kalan esas ölçüdür.
Eğer açı radyan olarak verilmiş ise 2π radyanın katlarını atın ve esas ölçüyü bulun.

Radyan olarak verilen bir açının esas ölçüsü bulunurken pay, paydanın iki katına bölünür ve kalan paya yazılır, payda ise aynen yazılır.

Negatif Yönlü Açıların Esas Ölçüsü

İlk önce verilen açıyı pozitifmiş gibi düşünerek esas ölçüyü bulun. Sonra da bulduğunuz değeri derece ise 360° den, radyan ise 2π radyandan çıkarın.
Anladınız mı?

10. **Ölçüsü 1500° olan açının esas ölçüsü kaç derecedir?**

11. **Ölçüsü 800° olan açının esas ölçüsü kaç derecedir?**

12. **Ölçüsü – 1600° olan açının esas ölçüsü kaç derecedir?**

13. **Ölçüsü – 1570° olan açının esas ölçüsü kaç derecedir?**

14. **Ölçüsü $\frac{43\pi}{5}$ radyan olan açının esas ölçüsü kaç radyandır?**

15. **Ölçüsü $\frac{34\pi}{3}$ radyan olan açının esas ölçüsü kaç radyandır?**

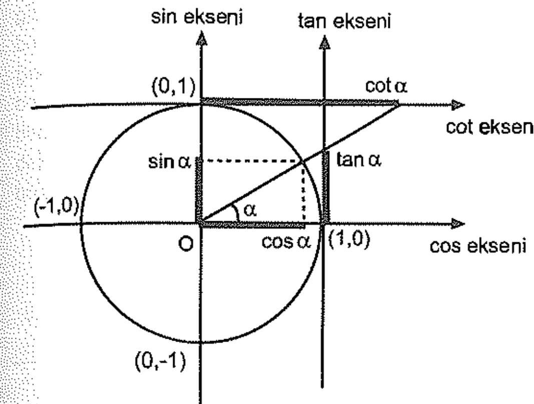
16. **Ölçüsü $\frac{9\pi}{2}$ radyan olan açının esas ölçüsü kaç radyandır?**

17. **Ölçüsü $\frac{-25\pi}{3}$ radyan olan açının esas ölçüsü kaç radyandır?**

18. **Ölçüsü $\frac{-32\pi}{5}$ radyan olan açının esas ölçüsü kaç radyandır?**

Trigonometrik Fonksiyonlar

Bir tane birim çember (Yarıçapı 1 birim ve merkezi orijinde olan çembere birim çember diyoruz.) çizip y eksenini sinüs ekseni, x eksenini de cosinüs ekseni olarak alabiliriz. Bunda bir sakınca yok.



Birim çember üzerindeki herhangi bir açının birim çemberi kestiği noktanın sin ekseni üzerindeki dik izdüşümü olan noktanın ordinatı o açının sin değerini, cos ekseni üzerindeki dik izdüşümü olan noktanın apsisi o açının cos değerini, tan eksenini kestiği noktanın ordinatı o açının tan değerini, cot eksenini kestiği noktanın apsisi de o açının cot değerini verir.
Biraz uzun oldu gibi. Ama şekli inceleyerek okursanız daha hoş olacak.

(0°, 90°) aralığındaki bir açının değeri büyüdükçe sinüs ve tanjant değeri artar.

Örneğin,

$\sin 90^\circ > \sin 70^\circ > \sin 35^\circ > ... > \sin 0^\circ$ aynı şekilde

$\tan 90^\circ > \tan 65^\circ > \tan 45^\circ > ... > \tan 0^\circ$ dir.

Aynı aralıkta açı büyüdükçe kosinüs ve kotanjant değeri azalır.

Örneğin,

$\cos 0^\circ > \cos 10^\circ > \cos 35^\circ > ... > \cos 90^\circ$ yine $\cot 0^\circ > \cot 5^\circ > \cot 45^\circ > ... \cot 90^\circ$ dir.

Ve... Bu aralıktaki bir açının tanjant değeri sinüs değerinden her zaman daha büyüktür.
$\tan 20^\circ > \sin 20^\circ$, $\tan 50^\circ > \sin 50^\circ$ gibi.

1. $a = \sin 10^\circ$
$b = \sin 20^\circ$
$c = \sin 48^\circ$

olduğuna göre, a, b ve c yi küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

2. $a = \cos 11^\circ$
$b = \cos 75^\circ$
$c = \cos 56^\circ$

olduğuna göre, a, b ve c yi küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

3. $a = \tan 1^\circ$
$b = \tan 2^\circ$
$c = \tan 4^\circ$

olduğuna göre, a, b ve c yi küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

4. $a = \cot 5^\circ$
$b = \cot 20^\circ$
$c = \cot 15^\circ$

olduğuna göre, a, b ve c yi küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

Sıralama sorularında eğer açılar karışık verilirse en güzeli kosinüsleri sinüse, kotanjantları da tanjanta çevirip öyle sıralamak.

5. $x = \sin 40°$

$y = \sin 50°$

$z = \cos 20°$

olduğuna göre, x, y ve z yi küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

6. $a = \sin 17°$

$b = \cos 54°$

$c = \cos 89°$

olduğuna göre a, b, c yi küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

7. $a = \tan 25°$

$b = \cot 45°$

$c = \cot 85°$

olduğuna göre a, b, c yi küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

8. $a = \cot 82°$

$b = \cot 12°$

$c = \tan 61°$

olduğuna göre a, b, c yi küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

Birim çemberden çıkarabileceğiniz bir diğer sonuç şu: sin ve cos un en küçük değeri – 1 en büyük değeri 1 dir.

Yani, $-1 \le \sin x \le 1$ $\quad -1 \le \cos x \le 1$ dir.

9. 2sinx – 3cosy farkı en az kaçtır?

10. $a = 4 + 3\sin\alpha$

$b = 1 + 3\cos\theta$

olduğuna göre, a – 2b farkı en çok kaçtır?

11. $k = 5\sin a + 7\cos b$

olduğuna göre, k nın alabileceği en büyük değer kaçtır?

12. $A = \dfrac{5\cos x + 1}{2}$

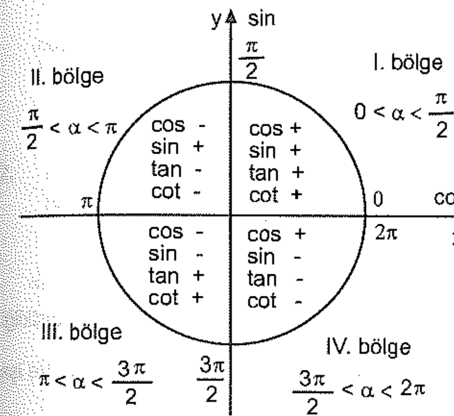
olduğuna göre, A nin değer aralığı nedir?

Birim Çemberde Bölgeler ve Trigonometrik Fonksiyonların işaretleri

Analitik geometride dik koordinat düzlemindeki bölgeler ve işaretlerin aynısı burada da var.

Dik koordinat düzleminde x eksenini kosinüs ekseni olarak, y eksenini de sinüs ekseni olarak alınca bölgelerdeki sin ve cos un işaretini çok kolay bir şekilde bulabilirsiniz.

Şekilde yazdım hepsini. İnceleyin bakalım☺ Ama bence mantığını anlasanız daha iyi edersiniz.☺ Ezberlemeye gerek yok bence. tan ve cot un bölgelerdeki işareti zaten sin ve cos un o bölgedeki işaretleri bölünerek bulunabiliyor.



1. Aşağıdaki trigonometrik oranların işaretlerini belirtiniz.

a) sin95° b) cos79°

c) sin171° d) tan105°

e) cot171° f) sin186°

2. Aşağıdaki trigonometrik oranların işaretlerini belirtiniz.

a) cos195° b) cot286°

c) tan255° d) cos346°

e) sin301° f) sec146°

3. Aşağıdaki trigonometrik oranların bölgelere göre işaretlerini belirtiniz.

a) $\cos\frac{2\pi}{3}$ b) $\cos\frac{5\pi}{3}$

c) $\sin\frac{7\pi}{4}$ d) $\tan\frac{11\pi}{6}$

e) $\tan\frac{9\pi}{5}$ f) $\cot\frac{16\pi}{9}$

4. Aşağıdaki trigonometrik oranların işareti nedir?

a) $\cos\frac{23\pi}{15}$ b) $\sin\frac{13\pi}{20}$

c) $\cot\frac{11\pi}{18}$ d) $\cos\frac{42\pi}{36}$

e) $\sin\frac{27\pi}{45}$ f) $\tan\frac{23\pi}{30}$

5. $a = \sin 125° - \cos 154°$

$b = \tan 179° - \cot 191°$

$c = \cos 322° - \tan 154°$

olduğuna göre, a, b, c nin işaretleri sırasıyla ne dir?

6. $a = \dfrac{\sin 125°}{\cos 154°}$

$b = \dfrac{\tan 189°}{\cos 312°}$

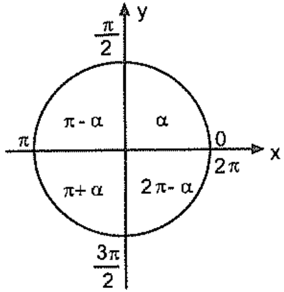
$c = \dfrac{\cot 280°}{\sin 125°}$

olduğuna göre, a, b, c nin işaretleri sırasıyla nedir?

90° ile 360° derece arasındaki açıların dar açılara dönüştürülmesi

$\pi \mp \alpha$ ve $2\pi \mp \alpha$ şeklinde ifade edilen açılar

Açılar x ekseninin alt tarafında ya da üst tarafında olmasına göre, $(\pi \mp \alpha)$ veya $(2\pi \mp \alpha)$ şeklinde ifade edilebilirler.



α dar açı olsun diyelim.

Eğer bir açı $(\pi \mp \alpha)$ veya $(2\pi \mp \alpha)$ şeklinde ifade edilmişse ilk önce hangi bölgedeyse verilen trigonometrik fonksiyonun o bölgedeki işareti belirlenir.

Sonra sadece α açısının trigonometrik oranı olarak yazılır. Trigonometrik fonksiyon aynen muhafaza edilir.

En iyisi mi bunu bir örnek üzerinde ifade edeyim.

Örnek soru

$\cos(\pi - x)$

ifadesinin eşiti nedir?

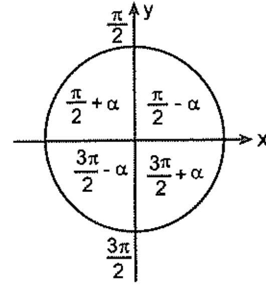
Çözelim☺

$\cos(\pi - x)$ i x dar açısının trigonometrik oranı olarak yazarken ilk önce verilen açının (Yani, $\pi - x$ in) hangi bölgede olduğuna bakın. Ve cos un bu bölgedeki işaretini yazın. Sonra da işaretiyle birlikte cosx olarak ifade edin.

Demek istediğim şu. $\pi - x$ ikinci bölgede ve cos burada eksi. Dolayısıyla $\cos(\pi - x) = -\cos x$ tir.

$\frac{\pi}{2} \mp \alpha$ veya $\frac{3\pi}{2} \mp \alpha$ şekilde ifade edilen açılar

Bu şekilde ifade etme zorunluluğu yok elbette. Ama adam ifade etmişse de yapacak bir şey yok☺



$\frac{\pi}{2} \mp \alpha$ veya $\frac{3\pi}{2} \mp \alpha$ şeklinde ifade edilen açıları dar açıların oranı olarak ifade ederken ilk olarak açının bölgesine göre verilen fonksiyonun işaretini yazın.
Sonra fonksiyonu değiştirin.
Fonksiyon sin ise cos, tan ise cot a dönüştürün.

Örnek soru

$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$

ifadesinin eşiti nedir?

Çözelim☺

Açı $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ şeklinde. Bir kere bunda isim değişikliği olacak. Ama ilk önce açının bölgesine bakın. Ve işaretini yazın.
Açı üçüncü bölgede.
Bu bölgede sinüs negatif. Önce bu eksiyi yazın. Sonra da sin yerine cos.

Dolayısıyla $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha$ dır.

Anladınız mı?
Anlamış olmanız lâzım.
Özetleyeyim.
İlk önce açının bölgesine göre verilen fonksiyonun işaretini yazıyor. Sonra da π, 2π, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ yi atıyor ve sadece x i bırakıyoruz.

Ama $\frac{3\pi}{2}$ ve $\frac{\pi}{2}$ de isim değiştirmeyi unutmuyoruz☺

1. Aşağıdaki trigonometrik oranları x e bağlı olarak ifade ediniz.

a) $\sin(\pi - x)$ b) $\cos(\pi + x)$

c) $\cot(2\pi - x)$ d) $\tan(\pi - x)$

e) $\cos(\pi - x)$ f) $\cot(\pi + x)$

g) $\sin(\pi + x)$ h) $\tan(2\pi + x)$

2. Aşağıdaki trigonometrik oranları x e bağlı olarak ifade ediniz.

a) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ b) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$

c) $\cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ d) $\tan\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$

e) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ f) $\cot\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

g) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ h) $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Bu arada şunu da not edin münasip bi yere☺
$(-x) = (2\pi - x)$ olarak alınabilir.
Meselâ, $\tan(-x) = \tan(2\pi - x) = -\tan x$ tir.

3. Aşağıdaki trigonometrik oranları x e bağlı olarak ifade ediniz.

a) $\sin(-x)$ b) $\cos(-x)$

c) $\cot(-x)$ d) $\tan(-x)$

İyi de bütün bunlar ne işe yarayacak. Şimdi onu izah edeyim. Ama önce şu soruma cevap verin.

"$\cos 120°$ nin değeri kaçtır?"

Buldunuz mu?
İşte bu şekilde 90° den büyük açıların trigonometrik oranını bulurken bunları kullancaz.
Göstereyim.

$\cos 120°$ nin kaç olduğunu bulmak istiyoruz.
Açı ikinci bölgede.
Bu bölgede cos negatif. Önce bunu yazın.
Sonra şunu düşünün bu bölgedeki açıyı nasıl yazıyorduk?

$180° - \alpha$ şeklinde öyle değil mi?
Şimdi de şunu yapın.
$\cos 120° = \cos(180° - 60°)$ tır.

Gerisi kolay. $180°$ yi atın ve
$\cos(180° - 60°) = -\cos 60° = \frac{-1}{2}$ yi bulun☺

Son olarak da 90° den büyük açıların trigonometrik oranının bulurken ya $180° \pm \alpha$ ya da $360° - \alpha$ şeklinde yazın ve öyle hesaplayın. Sebebini boş verin. Dediğimi yapın.☺

4. Aşağıdaki ifadelerin kaça eşit olduklarını yazınız.

a) $\cos 120°$ b) $\cot 300°$

c) $\sin 135°$ d) $\tan 240°$

5. $\sin 240° \cdot \tan 330°$

işleminin sonucu kaçtır?

6. $\frac{\cos 300^\circ}{\tan 225^\circ} - \sin 210^\circ$

işleminin sonucu kaçtır?

7. $\frac{\tan 225^\circ - 2\sin 150^\circ}{\cot 135^\circ - \cot 45^\circ}$

işleminin sonucu kaçtır?

8. $\frac{\sin^2 300^\circ}{\tan 225^\circ} - \cos 240^\circ$

işleminin sonucu kaçtır?

9. $\cot\frac{27\pi}{4} \cdot \cos\frac{7\pi}{6}$

işleminin sonucu kaçtır?

10. $\sin\frac{25\pi}{6} - \cos\frac{2\pi}{3}$

işleminin sonucu eşittir?

11. $\cos(\pi - \alpha) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

ifadesinin eşiti nedir?

12. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \sin(\pi - x)$

ifadesinin en sade biçimi nedir?

13. $m = \tan 20^\circ$

olduğuna göre, $\tan 290^\circ$ nin m türünden değeri nedir?

1. $f(x) = \cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

olduğuna göre, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ değeri kaçtır?

2. $\frac{\cos\left(\frac{5\pi}{2} + x\right)}{\tan(\pi + x)}$

ifadesinin en sade biçimi nedir?

3. $0 < a < 90$ olmak üzere

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$

ifadesinin eşiti nedir?

4. $\sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) + \cos(3\pi - x)$

ifadesinin eşiti nedir?

5. $2\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 3\cos(\pi + x)$

olduğuna göre, tanx değeri kaçtır?

6. $4\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 5\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

olduğuna göre, tanx değeri kaçtır?

7. $f(x) = \cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \tan(\pi + x)$

olduğuna göre, $f\left(\frac{-\pi}{4}\right)$ değeri kaçtır?

8. $\frac{\sin(-x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\cos(2\pi - x)} = \frac{-8}{3}$

olduğuna göre, tanx kaçtır?

9. $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos(\pi+x)}{\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}$

ifadesinin en sade biçimi nedir?

10. $\tan10^\circ = x$

olduğuna göre, $\dfrac{\tan190^\circ+\cot170^\circ}{\cot80^\circ-\cot350^\circ}$ **ifadesinin x türünden değeri nedir?**

Geniş açıların trigonometrik oranlarını sıralarken ilk önce geniş açıları dar açıya dönüştürmek lâzım.

11. $x = \sin117^\circ$

$y = \cos154^\circ$

$z = \cos289^\circ$

olduğuna göre, x, y, z yi küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

12. $k = \cos277^\circ$

$l = \sin184^\circ$

$m = \sin189^\circ$

olduğuna göre k, l, m yi büyükten küçüğe doğru sıralayınız.

13. $x = \tan248^\circ$

$y = \cot154^\circ$

$z = \cos309^\circ$

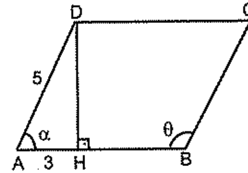
olduğuna göre, x, y, z yi büyükten küçüğe doğru sıralayınız.

14. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere,

$\sin x = \frac{3}{5}$

olduğuna göre, $\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ **kaçtır?**

15.



ABCD bir paralelkenar, $|AD| = 5$ birim, $|AH| = 3$ birim, $m(\widehat{DAH}) = \alpha$, $m(\widehat{ABC}) = \theta$ **olduğuna göre, tanθ kaçtır?**

16. $0 < x < 90$ olmak üzere

$\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\cot(\pi-x)$

ifadesinin eşiti nedir?

1. $0 < x < 90$ olmak üzere,

$\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\cos(\pi+x)}{\cos(-x)}$

ifadesinin eşiti nedir?

2. $x + y = \frac{\pi}{4}$ olmak üzere

$\sin(3x+2y) = \frac{4}{5}$

olduğuna göre, sinx kaçtır?

3. $x + y = \frac{\pi}{10}$ olmak üzere,

$\sin(5x+6y) = \frac{1}{3}$

olduğuna göre, cosy kaçtır?

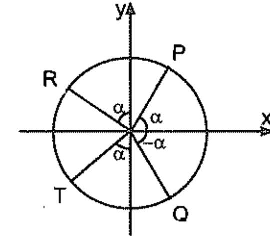
4. $x + y = \frac{\pi}{3}$ olmak üzere,

$\sin(5x+3y) = \frac{4}{5}$

olduğuna göre, sin2x kaçtır?

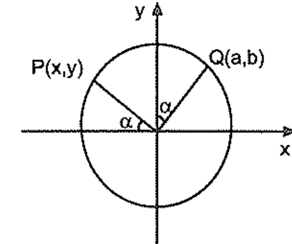
Hatırlayın☺ Birim çember üzerindeki bir noktanın apsisi (x i) o noktaya karşılık gelen açının cos u, ordinatı da (y si de) sin i idi.

5.



Birim çemberde gösterilen P, Q, R ve T noktalarının koordinatlarını α açısına bağlı olarak ifade ediniz.

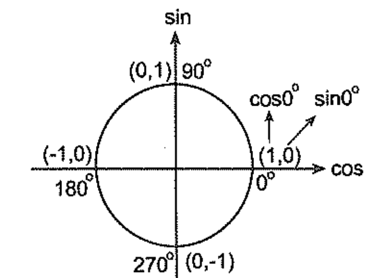
6. Şekildeki birim çemberde P ve Q noktaları verilmiştir.



olduğuna göre, P ve Q noktalarının koordinatları toplamı nedir?

0°, 90°, 180°, 270° ve 360° nin trigonometrik değerleri

Bu değerleri dik üçgen çizerek gösteremezsiniz. 90° nin katlarının sinüs ve kosinüs değerlerini birim çember yardımıyla kolaylıkla bulabilirsiniz.



Birim çember üzerindeki noktaların apsisi (x i) o noktaya karşılık gelen açının kosinüsü, ordinatı da (y si de) sinüsüdür.

7. $\dfrac{\sin 90^\circ . \cos 30^\circ}{\cos 180^\circ}$
işleminin sonucu kaçtır?

8. $\dfrac{\sin 270^\circ - \cos 0^\circ}{\cos 180^\circ}$
işleminin sonucu kaçtır?

9. $\dfrac{\tan 0^\circ + \cot 45^\circ}{\sin 90^\circ}$
işleminin sonucu kaçtır?

10. $\dfrac{\sin 270^\circ + \cos 180^\circ}{\cot 90^\circ + \cos 360^\circ}$
işleminin sonucu kaçtır?

11. $\dfrac{\tan^2 30^\circ + \cos 240^\circ}{\sin 270^\circ}$
işleminin sonucu kaçtır?

12. $\dfrac{\sin 180^\circ + 1}{\cos 300^\circ - 1}$
işleminin sonucu kaçtır?

13. $\dfrac{\sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ}{\sin 90^\circ + \cos 0^\circ}$
işleminin sonucu kaçtır?

14. $\sqrt{3\sin\dfrac{\pi}{2} - \cos\pi}$
ifadesinin değeri kaçtır?

15. $f(x) = \sin 3x - \cos 4x$
olduğuna göre, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ **kaçtır?**

16. $f\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos 2x + \sin 3x$
olduğuna göre, $f(\pi)$ **kaçtır?**

Trigonometrik Fonksiyonların Periyodu

Ayrıntıya girmeden bir iki şey söyleyip geçsek çok da bir şey kaybetmezsiniz☺
Trigonometrik fonksiyonlar periyodiktirler. Yani, grafiklerini çizerseniz belli aralıklarda sürekli aynı biçimde devam ettiklerini görürsünüz.

Periyotla ilgili şunları bilin yeter☺

$f(x) = \sin^{2n}(ax+b)$

$f(x) = \cos^{2n}(ax+b)$

$f(x) = \tan^{n}(ax+b)$

$f(x) = \cot^{n}(ax+b)$

fonksiyonlarının periyodu $T = \dfrac{\pi}{|a|}$ dır.

$f(x) = \sin^{2n-1}(ax+b)$

$f(x) = \cos^{2n-1}(ax+b)$

fonksiyonlarının periyodu ise $T = \dfrac{2\pi}{|a|}$ dır.

Yani, sin ve cos un tek kuvvetlerinde periyot $\dfrac{2\pi}{|a|}$, geri kalanların hepsinde $\dfrac{\pi}{|a|}$ dır.

1. **Aşağıdaki fonksiyonların periyotlarını bulunuz.**
a) $f(x) = \sin(2x + 15^\circ)$
b) $f(x) = \sin^2(5x - 10^\circ)$
c) $f(x) = \cos^3(150^\circ + 3x)$
d) $f(x) = -2 + \cos^4(-2x + 15^\circ)$

2. **Aşağıdaki fonksiyonların periyotlarını bulunuz.**
a) $f(x) = \cot(90^\circ - 5x)$
b) $f(x) = \tan^2(4x + 20^\circ)$
c) $f(x) = \sin\left(\dfrac{2x + 15^\circ}{3}\right)$
d) $f(x) = \cot^5\left(\dfrac{2x - 10^\circ}{5}\right) + 5$

3. $f(x) = 1 + \tan^2\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right)$
fonksiyonunun periyodu kaçtır?

4. $f(x) = \cos^2\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right)$
fonksiyonunun periyodu $\dfrac{2\pi}{m}$ **olduğuna göre, m kaçtır?**

5. $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \sin^3\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$
fonksiyonunun periyodu kaçtır?

6. $f(x) = 2\sin^3\left(\dfrac{-2x}{3} + \dfrac{\pi}{3}\right)$
fonksiyonunun periyodu kaçtır?

Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

Biraz değişik gelebilir.
Ama bunu ilk icat eden! amcalar sizi hiç düşünememişler ve trigonometrik fonksiyonların tersini arcf(x) biçiminde ifade etmişler. Siz de sebebini sormazsınız artık.☺

Meselâ y = sinx fonksiyonunun tersi **arcsinx** şeklinde ifade edilir.

Yani, f(x) = sinx ise $f^{-1}(x) = \arcsin x$ tir.

Anladınız mı bu muhabbeti?
Anlamadınız...☹☹ Neyse...

Ters trigonometrik fonksiyonlarda en önemli şeylerden biri tanım ve değer kümeleridir.

Aklınızda şöyle kalsın.

arcsin ve arctan ın sonucu $\frac{-\pi}{2}$ ile $\frac{\pi}{2}$ **arasında, arccos ve arccot un sonucu ise** 0 ile π **arasında çıkar.**

Bu söylediğim şeyde ufak bir yanlışlık var. Ama siz boş verin. Zaten fark etmeyeceksiniz bile☺Dediğim gibi öğrenin.☺

Peki, gelelim asıl olaya.

" $\arcsin\frac{1}{2}$ **kaça eşittir?** " sorusunun cevabı ile **"sinüsü** $\frac{1}{2}$ **olan açı kaç dercedir?"** sorusunun cevabı aynı gibi.

Bunu da şöyle buluyorsunuz.

$\arcsin\frac{1}{2} = x$ ise $\sin x = \frac{1}{2}$ dir. sinüs değeri $\frac{1}{2}$ olan açı da $\frac{\pi}{6}$ olduğundan cevap $\frac{\pi}{6}$ dır.

Yani, $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ dır. Yine aynı şekilde,

$\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = x$ ise $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dir.

$\arctan\frac{4}{3} = x$ ise $\tan x = \frac{4}{3}$ tür.

Aslında hep şunu yapsanız da olur. Ters trigonometrik ifadeye x deyin ve üstte yaptığım gibi devam edin. Hepsi böyle çözülüyor desem yeridir☺

Şuna da dikkat edin $\arcsin\left(\frac{-1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$ ve

$\arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$ dır.

Yani arcsin deki ve arctan daki eksi başa geliyor gibi düşünebilirsiniz.

7. Aşağıdaki ifadelerin eşitlerini bulunuz.

a) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\arccos\frac{1}{2}$

c) $\arctan\sqrt{3}$ d) $\text{arccot}\frac{1}{\sqrt{3}}$

8. $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \arcsin 0$

işleminin sonucu kaçtır?

9. $\arccos 1 + \arctan\sqrt{3}$

işleminin sonucu kaçtır?

10. $\arcsin\left(\frac{-1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

işleminin sonucu kaçtır?

1. $\arccos\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + \text{arccot}(-1)$

işleminin sonucu kaçtır?

2. $\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \cos\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$

işleminin sonucu kaçtır?

3. $\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \sin(\text{arccot}1)$

işleminin sonucu kaçtır?

4. $\tan\left(\arccos\frac{1}{2}\right) - \cos\left(\text{arccot}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

işleminin sonucu kaçtır?

Hatırlayın☺ ters trigonometrik fonksiyona hep x deyip çözüyorduk. Bir örnek yapayım.

Örnek Soru

$\tan\left(\arccos\frac{5}{13}\right)$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

Çözelim☺
arc lı ifadenin tamamına x deyin.
Yani, $\arccos\frac{5}{13} = x$ olsun.
Bu durumda şunları hemen görmeniz lâzım.
$\arccos\frac{5}{13} = x$ ise $\cos x = \frac{5}{13}$ tür. Ve sorulan şey tanx tir. Bunu da güzel bir dik üçgen çizip bulursunuz artık☺ kaç çıkıyor? $\tan x = \frac{12}{5}$ değil mi? ☺

5. $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$

ifadesinin değeri kaçtır?

6. $\tan\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)$

ifadesinin değeri kaçtır?

7. $\cos\left(\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

ifadesinin değeri kaçtır?

8. $\cos\left(2\pi - \arctan\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

ifadesinin değeri kaçtır?

9. $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \text{arccot}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

ifadesinin değeri kaçtır?

10. $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

ifadesinin değeri kaçtır?

11. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{4}{3}\right)$

ifadesinin değeri kaçtır?

12. $0° < a < 90°$ olmak üzere,

$\cot\left(\arctan\frac{5}{12}\right) = \tan a$

olduğuna göre, sin a kaçtır?

13. $\arccos\left(\frac{x-1}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$

olduğuna göre x kaçtır?

14. $\arcsin\left(\frac{4x+5}{3}\right) = \frac{\pi}{2}$

olduğuna göre x kaçtır?

15. $f(x) = \arcsin\left(\frac{x+3}{5}\right)$

fonksiyonunun en geniş tanım aralığı nedir?

1. $f(x) = \arccos\left(\frac{3x-4}{2}\right)$

fonksiyonunun en geniş tanım aralığı nedir?

2. $f(x) = \arcsin\left(\frac{x-1}{3}\right)$

fonksiyonu x in kaç tam sayı değeri için tanımlıdır?

Hatırlayın☺ Bir fonksiyonun tersini bulurken ilk iş x i yalnız bırakmaktı.

3. $[-8,2]$ de tanımlı f fonksiyonu,

$f(x) = \arcsin\left(\frac{x+3}{5}\right)$

olduğuna göre, ters fonksiyon olan $f^{-1}(x)$ nedir?

4. $[0,4]$ te tanımlı f fonksiyonu

$f(x) = \arccos\left(\frac{x}{2} - 1\right)$

olduğuna göre, ters fonksiyon olan $f^{-1}(x)$ nedir?

5. $[2,6]$ da tanımlı f fonksiyonu,

$f(x) = \arccos\left(\frac{4-x}{2}\right)$

olduğuna göre, ters fonksiyon olan $f^{-1}(x)$ nedir?

6. $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ de tanımlı f fonksiyonu

$f(x) = \cos 4x + 2$

olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ ters fonksiyonu nedir?

7. $f(x) = \sin(2x-3)$

olduğuna göre $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

8. $f(x) = 3\sin\left(\frac{x}{2} - 1\right) - 2$

olduğuna göre $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

Üçgende Trigonometrik bağıntılar

Sinüs Teoremi

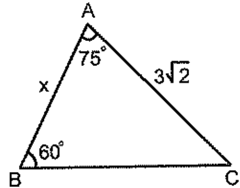
Bir ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı R ve kenar uzunlukları a, b ve c olmak üzere,

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R$$

Bu eşitliğin ispatı kolay.
Ama korkmayın ispata girmiycem☺

Sinüs teoremi denen şey bu. Yani, kenar uzunluklarıyla karşılarındaki açıların sinüsleri oranı eşit ve 2R dir.
Göreceksiniz. Çok fazla soru tipi yok zaten. Onun için sıkıntıya gerek yok☺

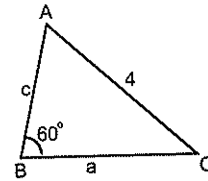
9.



Şekilde verilenlere göre, x kaç br dir?

10. Bir ABC üçgeninde, m(BÂC) = 60°, |BC| = $4\sqrt{3}$ cm **olduğuna göre, ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı kaç cm dir?**

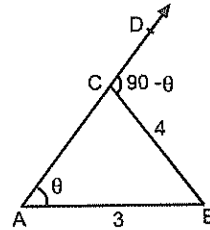
11.



Şekilde verilenlere göre ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı kaçtır?

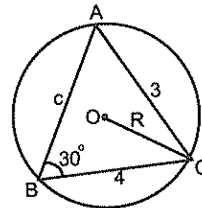
12. Şekilde A, C, D noktaları doğrusal olmak üzere ABC üçgeni verilmiştir.

|AB| = 3 cm,
|BC| = 4 cm
$m(C\widehat{A}B) = \theta$
$m(\widehat{BCD}) = 90 - \theta$



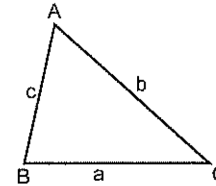
olduğuna göre, tanθ kaçtır?

13.



Şekilde verilenlere göre ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı kaçtır?

Üçgenin Alanı

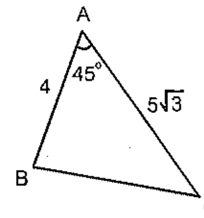


Kenar uzunlukları a, b, c ve iç açıları, $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ olan ABC üçgeninin alanı

$$A(ABC) = \frac{a.b.\sin\widehat{C}}{2} = \frac{b.c.\sin\widehat{A}}{2} = \frac{a.c.\sin\widehat{B}}{2}$$

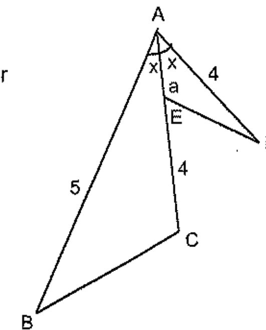
Yani, üçgenin alanı, iki kenar ile bu kenarlar arasında kalan açının sinüsünün çarpımının yarısına eşit☺

1.



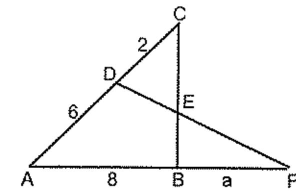
Şekilde verilenlere göre ABC üçgeninin alanı kaçtır?

2. Şekilde |AB| = 5 br
|AD| = |EC| = 4 br
|AE| = a br



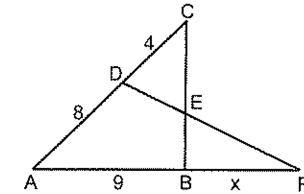
ABC üçgeninin alanı AED üçgeninin alanının 5 katı olduğuna göre, a kaçtır?

3.



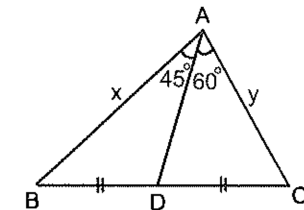
Şekilde verilen ABC ve ADF üçgenlerinin alanları eşit olduğuna göre a kaçtır?

4.



Şekilde, A(CDE) = A(EBF) olduğuna göre, x kaç birimdir?

5.



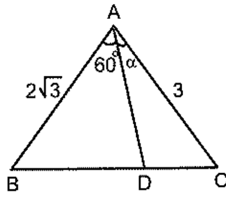
Şekildeki ABC üçgeninde, |BD| = |DC|
m(BÂD) = 45°, m(DÂC)= 60°, |AB| = x, |AC| = y
olduğuna göre, $\frac{x}{y}$ oranı kaçtır?

6. Şekilde $|BD| = 2|DC|$

$|AB| = 2\sqrt{3}$ cm

$|AC| = 3$ cm

$m(\widehat{BAD}) = 60°$



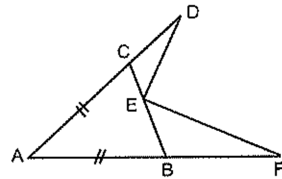
olduğuna göre, m(DAC) = α kaç derecedir?

7. Şekilde ABC ikizkenar üçgen

$|AB| = |AC|$

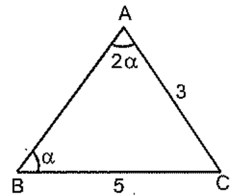
$|BF| = 3|CD|$

$|BE| = 2|EC|$



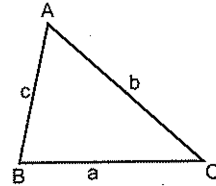
olduğuna göre, $\frac{A(DCE)}{A(EBF)}$ oranı kaçtır?

8.



Şekilde verilenlere göre, cosα nın değeri kaçtır? (Bu arada sin2α = 2sinα.cosα dır)

Kosinüs Teoremi



Bir ABC üçgeninde kenar uzunlukları a, b, c ve iç açıları $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ olmak üzere

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$

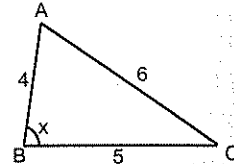
9. Şekilde,

$|AB| = 4$ cm

$|BC| = 5$ cm

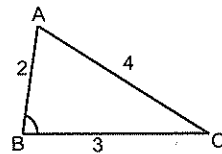
$|AC| = 6$ cm

$m(\widehat{ABC}) = x$



olduğuna göre, cosx kaçtır?

10.



Şekilde verilen uzunluklara göre, $\cos(\widehat{ABC})$ **kaçtır?**

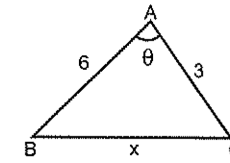
1. Şekilde,

$|AB| = 6$ cm

$|AC| = 3$ cm

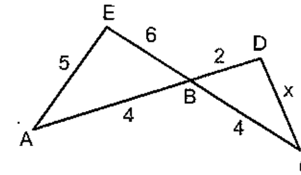
$|BC| = x$ cm

$m(\widehat{BAC}) = \theta$



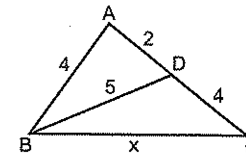
$\cos\theta = \frac{1}{4}$ **olduğuna göre, x kaçtır?**

2.



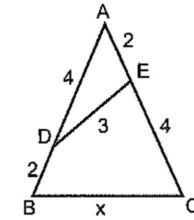
Şekilde verilenlere göre, x kaçtır?

3.



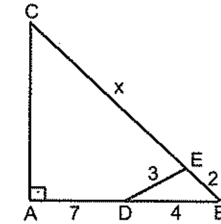
Şekilde verilenlere göre, x kaçtır?

4.



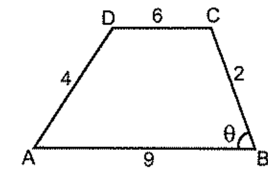
Şekilde verilenlere göre, x kaçtır?

5.

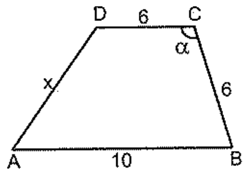


Şekilde verilenlere göre x kaçtır?

6.

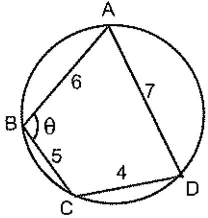


Şekilde verilen ABCD yamuğunda $m(\widehat{ABC}) = \theta$ **olduğuna göre, cosθ kaçtır?**

7. 

Şekildeki ABCD yamuğunda $\cos\alpha = -\frac{9}{16}$ **olduğuna göre, x kaçtır?**

Kirişler dörtgeninde karşılıklı iki açının toplamı 180° idi☺

8. 

ABCD kirişler dörtgeni olduğuna göre, cosθ kaçtır?

9. Bir ABC üçgeninde,

$a^2 = b^2 + c^2 + bc$

olduğuna göre $m(\widehat{A})$ **kaç derecedir?**

10. Bir ABC üçgeninde,

$b^2 = a^2 + c^2 - \sqrt{3}ac$

olduğuna göre $m(\widehat{B})$ **kaç derecedir?**

11. **Kenar uzunlukları 4 cm, 6 cm ve 8 cm olan bir üçgende ölçüsü en büyük olan açı α olduğuna göre cosα kaçtır?**

12. **Kenar uzunlukları 3 cm, 3 cm ve** $3\sqrt{2-\sqrt{3}}$ **cm, olan ikizkenar üçgenin tepe açısı α olduğuna göre, cosα kaçtır?**

Toplam – Fark Formülleri

Bunları iyi öğrenin. Çok önemli. Çünkü diğer formülcüklerin☺ hepsi bunlardan çıkarılmış.

Onun için söyleyeceğim her şeyin sizin için önemli olduğunu düşünüyorum. Ona göre.

Bazen bir açının trigonometrik oranını direkt değil de iki açının toplamı veya farkı şeklinde yazarak hesaplamak gerekebilir. Dolayısıyla toplam ve fark formülleri iki açının toplamı veya farkı olarak yazılabilen açıların trigonometrik değerlerini hesaplamak için kullanılıyor.

Birazdan göreceksiniz☺

İşte formüller...

İspatına girmiyorum. Merak ederseniz mail adresim var. ☺

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

Şimdi boş bir kâğıt alın ve bunları ezberleyene kadar yazın çizin. Ezberlediğinizden emin olduktan sonra antrenmanlara geçebilirsiniz.☺

Eğer bunları ezbere bilemezseniz önünüze gelen soruda ne yapacağınızı bilseniz bile sonuca ulaşamayacaksınız. Onun için lütfen adam gibi halledin bunları☺

Zaten toplam ve fark formüllerini çok iyi bilirseniz, daha sonra vereceğim **yarım açı, dönüşüm ve ters dönüşüm formüllerini** daha kolay öğrenebilirsiniz. Örnek üzerinde göstereyim.

Örnek Soru

sin15° nin değeri kaçtır?

Çözüm☺

Bu trigonometrik oranlarını daha önceden bildiğimiz bir açı değil. Değil ama bulabileceğimiz bir açı. Şöyle ki

15° = 45° – 30° olarak yazılabilir.

Dolayısıyla da sin15° = sin(45° – 30°) olur. Ki bu da sin(x – y) ye benzedi.

sin(x – y) = sinx.cosy – cosx.siny idi.

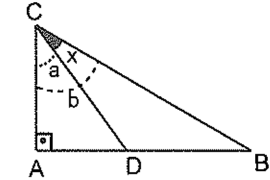
Yani, sin(45° – 30°) = sin45°cos30° – cos45°sin30° dir. Artık bunları biliyorsunuzdur.

Sonucu $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ olarak bulmuş olmanız gerekiyor☺ Buldunuz di mi?

Yalnız burada sorular daha çok geometrik şekiller üzerindeki açının tan ı veya cos u kaçtır? şeklinde soruluyor. Bu tür sorularda istenen açıyı ya iki açının toplamı ya da farkı şeklinde yazmaya çalışın.

Ne demek istediğimi şekil üzerinde göstereyim.

Meselâ diyelim ki aşağıdaki gibi bir üçgen de tanx i sormuş olsunlar.



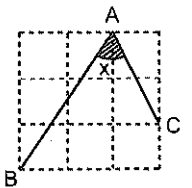
Bu gibi sorularda x i iki açının farkı biçiminde yazın. Yani x = b – a olduğunu görün. a ve b açıları dik üçgenlerin açıları olduğu için bunlarda sıkıntı olmaz.

$\tan x = \tan(b-a) = \frac{\tan b - \tan a}{1 + \tan b . \tan a}$ deyip hesaplarsınız artık.

Unutmadan söyleyeyim. cot(x + y) ve cot(x – y) yi vermedim. Çünkü biliyorsunuz ki☺

$\cot(x+y) = \frac{1}{\tan(x+y)}$ idi. Onun için vermedim. Zaten yeteri kadar formül var burada. Bir de onları verseydim... ☺

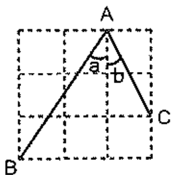
Siz de yandaki şekildeki x açısını iki açının toplamı olarak yazın ve tanx i bulun bakalım.



Şöyle olması en mantıklısı öyle değil mi?

x = a + b

Meselâ tanx = tan(a + b) dir. tana ve tanb yi de bulursunuz artık.☺



Trigonometrik oranlardan biri belli iken diğerleri lâzım olduğunda dik üçgen çiziyorduk.☺

1. x ve y dar açılar olmak üzere,

$\sin x = \frac{3}{5}$

$\cos y = \frac{5}{13}$

olduğuna göre aşağıdaki ifadelerin sonuçları kaçtır?

a) $\sin(x + y)$

b) $\sin(x - y)$

c) $\cos(x + y)$

d) $\cos(x - y)$

2. a ve b dar açılar olmak üzere,

$\tan a = \frac{2}{3}$

$\tan b = 2$

olduğuna göre aşağıdaki ifadelerin sonuçları kaçtır?

a) $\tan(a + b)$

b) $\tan(a - b)$

c) $\cot(a + b)$

d) $\cot(a - b)$

3. Aşağıdaki trigonometrik oranların değerlerini toplam fark formüllerini kullanarak hesaplayınız.

a) $\tan 75°$

b) $\tan 15°$

c) $\sin 105°$

d) $\cos 75°$

4. Aşağıdaki ifadelerin sonuçlarını bulunuz.

a) $\sin 10°.\cos 20° + \sin 20°.\cos 10°$

b) $\sin 70°.\cos 40° - \sin 40°.\cos 70°$

c) $\cos 10°.\cos 80° - \sin 10°.\sin 80°$

d) $\cos 110°.\cos 50° + \sin 110°.\sin 50°$

e) $\dfrac{\tan 10° + \tan 20°}{1 - \tan 20°.\tan 10°}$

f) $\dfrac{\tan 100° - \tan 40°}{1 + \tan 40°.\tan 100°}$

1. $\dfrac{\sin 5x.\cos x + \cos 5x.\sin x}{\sin 6x}$

işleminin sonucu kaçtır?

2. $A = \sin 15°.\cos 75°$

$B = \cos 15°.\sin 75°$

olduğuna göre, A – B farkı kaçtır?

3. $K = \sin 12°.\sin 72°$

$L = \cos 12°.\cos 72°$

olduğuna göre, K + L toplamı kaçtır?

4. $\dfrac{\sin 48° \cos 24° + \cos 48° \sin 24°}{2\cos 18°}$

işleminin sonucu kaçtır?

5. $\dfrac{\sin 3x \sin 2x + \cos 3x \cos 2x}{\sin 5x \cos x}$

işleminin sonucu kaçtır?

6. $\dfrac{\sin 10a \cos 5a - \cos 10a \sin 5a}{\sin 5a \cos 5a}$

işleminin sonucu kaçtır?

7. $\dfrac{\sin 50°.\cos 20° + \cos 50°.\sin 20°}{\cos 12°.\cos 58° - \sin 12°.\sin 58°}$

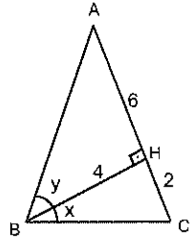
işleminin sonucu kaçtır?

8. $\dfrac{\cos 75°.\cos 15° + \sin 75°.\sin 15°}{\sin 45°.\cos 15° - \cos 45°.\sin 15°}$

işleminin sonucu kaçtır?

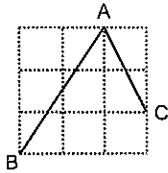
Geometrik şekillerde verilen bir açının trigonometrik oranını bulmak için bu açıyı iki açının toplamı olarak yazmanız gerekebilir☺

9.



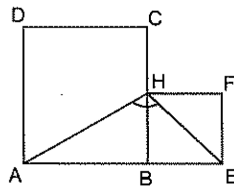
Şekilde verilenlere göre, tan(ABC) kaçtır?

10.



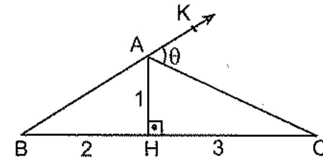
Şekil 9 özdeş kareden oluşmuştur.
Buna göre, tan(BAC) nin değeri kaçtır?

11.



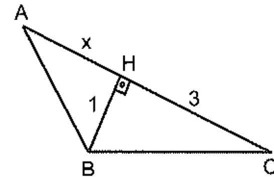
ABCD ve BEFH birer kare, |AB| = 2|BE| dir.
Buna göre, tan(AHE) **kaçtır?**

12.



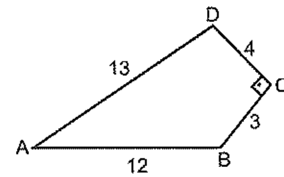
Şekilde verilenlere göre, tanθ kaçtır?

13.



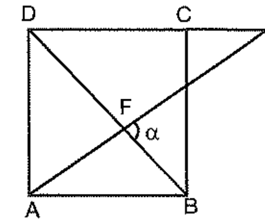
Şekilde |BH| = 1 cm, |HC| = 3 cm, |AH| = x cm ve tan(ABC) = −1 olduğuna göre, x kaçtır?

14.



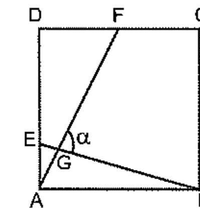
şekilde verilenlere göre, cos(ADC) kaçtır?

1.



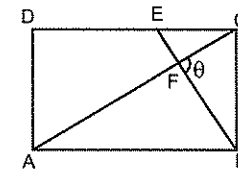
Şekilde ABCD kare, |AB| = 2|CE| olduğuna göre, tanα kaçtır?

2.



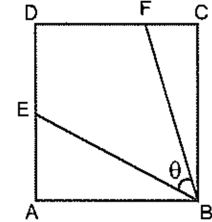
Şekilde ABCD kare, |AD| = 4|AE|, |DF| = |FC| olduğuna göre, tanα kaçtır?

3.



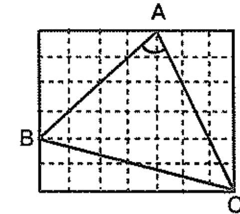
Şekildeki ABCD dikdörtgen,
|AB| = 3|CE| = 2|BC| olduğuna göre, tanθ kaçtır?

4.



Şekilde ABCD kare, |AD| = 3|AE|, |DC| = 4|FC| olduğuna göre, tanθ kaçtır?

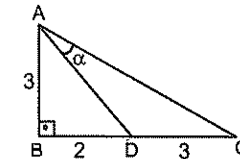
5.



Şekil özdeş karelerden oluştuğuna göre, tan(BAC) **kaçtır?**

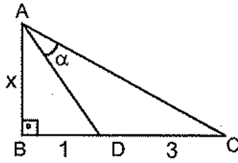
Ama bazen istenen açıyı iki açının farkı olarak yazmak daha mantıklıdır. İlle de ki açının toplamı olarak yazılacak diye bir kural yok.

6.



Şekilde verilenlere göre, tanα kaçtır?

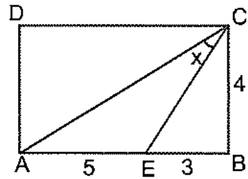
7.



Şekilde, $|BD| = 1$ cm, $|DC| = 3$ cm, $|AB| = x$ cm

$\tan\alpha = \frac{3}{4}$ **olduğuna göre, x kaçtır?**

8.



Şekilde ABCD dikdörtgen olduğuna göre, cotx kaçtır?

Ters trigonometrik şeylere rastlayınca eşittir x deyip bir şeyler yapıyordu☺

Meselâ $\arcsin\frac{3}{5} = x$ deyince $\sin x = \frac{3}{5}$ oluyordu.

9. $\sin\left(\arccos\frac{3}{5} + \arcsin\frac{5}{13}\right)$

işleminin sonucu kaçtır?

10. $\tan\left(\arctan\frac{3}{2} + \arctan\frac{1}{2}\right)$

işleminin sonucu kaçtır?

11. $\tan\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + \text{arccot}\frac{1}{7}\right)$

işleminin sonucu kaçtır?

12. $\cos\left(\arccos\frac{3}{5} + \text{arccot}\frac{12}{5}\right)$

işleminin sonucu kaçtır?

Yarım açı formülleri

Aslında bu ve bundan sonraki formüller hep toplam fark formüllerinden icat! edilmiş.☺ Adamlar uğraşıp bulmuş valla.☺

Yarım açı formüllerinin nasıl bulunduğunu siz de görün isterseniz. Toplam formüllerinde y yerine x yazın bakalım ne çıkıyor.
Birini göstereyim. Merak edenler diğerleriyle uğraşıp matematiğe katkıda bulunabilir☺.

Örneğin

$\cos(x + y) = \cos x.\cos y - \sin x.\sin y$

$\cos(x + x) = \cos x.\cos x - \sin x.\sin x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

elde edilir.

Anladınız mı bari?☺

İşte yarım açı formülleri

$\mathbf{\sin 2x = 2\sin x\cos x}$

$\mathbf{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x}$
$\mathbf{= 2\cos^2 x - 1}$
$\mathbf{= 1 - 2\sin^2 x}$

$\mathbf{\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}}$

"cos2x in üç tane mi formülü var?" diyeceksiniz şimdi. Yok yok. Hepsi aynı. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ formülünde

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ yazarak $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ i

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ yazarak da $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ i elde etmişler. Ama üçünü de bilmek lâzım. Hangisinin lâzım olacağı belli olmuyor da☺

Yarım açı formülleri hangi sorularda kullanılır?
Söyleyeyim.
Diyelim ki bir açının trigonometrik oranını biliyorsunuz. Ama siz bu açının iki katına eşit olan başka bir açının trigonometrik oranını bulmak istiyorsunuz. İşte bu tür sorularda yarım açı formülü kullanmak icap ediyor. Ya da tam tersi durumlarda. Yani, bir açının yarısına ait trigonometrik oranları bulurken.
Gel gör ki yarım açı formüllerini hatırlayamadınız. Ama toplam formüllerinde müthişsiniz. O zaman endişeye mahal yok☺ Toplam formüllerinden çıkarıverin bi zahmet. Ama bunu da yapamıyorsanız üzgünüm☹
Sınavda soruyla sadece bakışırsınız☺
Onun için formülleri aklınızda tutmanızda fayda var.
Ya da her seferinde toplam formüllerinden çıkarırsınız artık.☺

Örnek Soru

$\cos x = \frac{\sqrt{6}}{3}$

olduğuna göre, cos2x kaçtır?

Çözelim☺
Kolay bir soru.
cosx i verip cos2x i sordum. Yapmanız gereken cos2x in cosx li formülünü yazmak. Buradaki bütün olay bu zaten. Gerisi kolay.

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ formülünde $\cos x = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ü yerine yazın bakalım $\frac{1}{3}$ ü bulabilecek misiniz? ☺

1. Aşağıdaki ifadelerin sonuçlarını bulunuz.

a) $2\sin 15^\circ.\cos 15^\circ$

b) $2\sin 10^\circ.\cos 10^\circ$

c) $\cos^2 75^\circ - \sin^2 75^\circ$

d) $2\cos^2 \frac{\pi}{8} - 1$

e) $1 - 2\sin^2 15^\circ$

f) $\dfrac{2\tan 15^\circ}{1 - \tan^2 15^\circ}$

2. $\cos x = \frac{1}{3}$

olduğuna göre, cos2x in değeri kaçtır?

3. $\tan x = \frac{1}{3}$

olduğuna göre, tan2x değeri kaçtır?

4. $\tan\frac{x}{2} = \frac{3}{4}$

olduğuna göre, tanx in değeri kaçtır?

5. $\sin\frac{x}{2} = \frac{2}{3}$

olduğuna göre, cosx in değeri kaçtır?

6. $\sin x = \frac{4}{5}$

olduğuna göre, cos2x kaçtır?

7. $\sin x = \sqrt{a}$

olduğuna göre, cos2x in değeri kaçtır?

8. $\cos 4^{o} = a$

olduğuna göre, cos8° nin a türünden değeri nedir?

9. $\cos 2x = \frac{3}{5}$

olduğuna göre, $\cos^2 x$ **in değeri kaçtır?**

1. $\cos 2x = \frac{1}{3}$

olduğuna göre, $\sin^2 x$ **in değeri kaçtır?**

2. $\cos 6x = \frac{-1}{5}$

olduğuna göre, $\cos^2 3x$ **in değeri kaçtır?**

3. $\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$

ifadesinin eşiti nedir?

4. $\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1 - 2\sin^2 x}$

ifadesinin en sade biçimi nedir?

5. $\frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} + \sin x$

ifadesinin eşiti nedir?

6. $\sin 2x = a$

olduğuna göre, $(\sin x - \cos x)^2$ **ifadesinin a türünden değeri nedir?**

7. $\sin\frac{\pi}{8}\left(1 - 2\sin^2\frac{\pi}{16}\right)$

işleminin sonucu kaçtır?

8. $\sin^2\frac{\pi}{8} - \cos^2\frac{\pi}{8}$

işleminin sonucu kaçtır?

9. $\dfrac{\sin24^\circ\cos16^\circ+\cos24^\circ\sin16^\circ}{2\cos^2 20^\circ-1}$

işleminin sonucu kaçtır?

Şunu aklınızdan çıkarmayın☺

cos un yanındaki 1 i inadına yok edin. Bunu da cos2x in sin li ya da coslu formüllerinden biriyle yapın. Artık denersiniz. Hangisiyle yok oluyorsa işte☺ Meselâ,

$1+\cos2x=1+(2\cos^2x-1)=2\cos^2x$

$\cos2x-1=(1-2\sin^2x)-1=-2\sin^2x$ oluyor☺

Gördüğünüz üzre çok da zor değil. Ama önemli. İntegralde bile lâzım olduğu sorular var bunun.

10. $\dfrac{\cos2x+1}{\cos2x-1}$

ifadesinin eşiti nedir?

11. $\dfrac{1+\cos2x}{\sin2x}$

ifadesinin en sade biçimi nedir?

12. $\dfrac{1-\cos2x}{\sin2x}$

ifadesinin en sade biçimi nedir?

13. $\dfrac{\sin2x}{\cos2x-1}=-\dfrac{1}{3}$

olduğuna göre, tan2x kaçtır?

14. $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ olmak üzere,

$\dfrac{1+\cos2x}{\sin2x}=\dfrac{3}{4}$

olduğuna göre, cosx kaçtır?

15. **tan12° = m olduğuna göre,** $\dfrac{1+\cos24^\circ}{\sin24^\circ}$ **ifadesinin m türünden değeri nedir?**

1. $\dfrac{1-\cos32^\circ}{\sin8^\circ\cos8^\circ}$

ifadesinin eşiti nedir?

Toplam fark formüllerini unutmadınız değil mi? ☺

2. $\dfrac{\sin5x\cdot\cos3x-\cos5x\cdot\sin3x}{\sin x}$

ifadesinin en sade biçimi nedir?

3. $\dfrac{\cos52^\circ\cos32^\circ-\sin52^\circ\sin32^\circ}{2\sin3^\circ\cos3^\circ}$

ifadesinin en sade biçimi nedir?

Bazı sorularda ilk önce paydaları eşitlemek lâzım☺

4. $\dfrac{\sin15^\circ}{\cos15^\circ}+\dfrac{\cos15^\circ}{\sin15^\circ}$

işleminin sonucu kaçtır?

5. $\dfrac{\cos\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}}-\dfrac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}}$

işleminin sonucu kaçtır?

6. $\dfrac{\sin3a}{\cos a}+\dfrac{\cos3a}{\sin a}$

ifadesinin eşiti nedir?

7. $\dfrac{\sin72^\circ}{\sin24^\circ}-\dfrac{\cos72^\circ}{\cos24^\circ}$

işleminin sonucu kaçtır?

8. $\dfrac{\sin48^\circ}{\cos16^\circ}+\dfrac{\cos48^\circ}{\sin16^\circ}$

ifadesinin eşiti nedir?

9. $\frac{\sin 6x}{\sin 2x}+\frac{\cos 6x}{\cos 2x}=1$

olduğuna göre, $\cos^2 2x$ **in değeri kaçtır?**

10. **tanx = 2 olduğuna göre,** $\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{(\sin x+\cos x)^2-1}$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

$(\sin x \mp \cos x)^2 = 1 \mp \sin 2x$ olduğunu görün.

11. $\sin x+\cos x=\frac{1}{2}$

olduğuna göre, sin2x kaçtır?

12. $\sin x-\cos x=\frac{1}{\sqrt{5}}$

olduğuna göre, sin2x in değeri kaçtır?

13. $\sin x-\cos x=\frac{1}{\sqrt{3}}$

olduğuna göre, cos2x in değeri kaçtır?

14. $\sin 2x=\frac{1}{4}$

olduğuna göre, $\frac{\cos^3 x-\sin^3 x}{\cos x-\sin x}$ **oranı kaçtır?**

Ters trigonometrik fonksiyon içeren sorularda ters trigonometrik fonksiyona x deyin ve öyle çözün.

15. $\tan\left(2\arcsin\frac{12}{13}\right)$

ifadesinin eşiti kaçtır?

16. $\cos\left(2\arccos\frac{3}{5}\right)$

ifadesinin eşiti kaçtır?

1. $\cos\left(2\arcsin\frac{5}{13}\right)$

ifadesinin eşiti kaçtır?

2. $\sin\left(2\arccos\frac{3}{5}\right)$

ifadesinin eşiti kaçtır?

3. $\cot\left(\frac{\pi}{2}+2\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

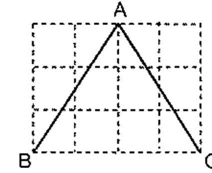
ifadesinin eşiti kaçtır?

4. $\cos\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{3}{4}\right)$

ifadesinin eşiti kaçtır?

Şekilli soruların bazılarında toplam formülü uygulamaya çalışırken yarım açı formülüne gerek olduğunu fark edersiniz. Fark ederseniz tabii ki.☺

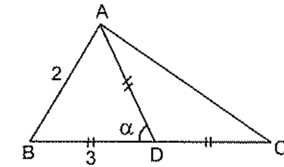
5.



Şekil 12 özdeş kareden oluşmuştur.

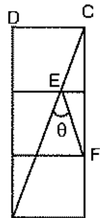
Buna göre, $\tan(\widehat{BAC})$ **kaçtır?**

6.



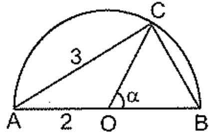
Şekilde verilenlere göre, cosα değeri kaçtır?

7. Aşağıdaki şekil üç eş kareden oluşmaktadır.



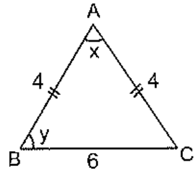
olduğuna göre, tanθ nın değeri kaçtır?

8.



Şekilde verilen O merkezli yarım çemberin yarıçapı 2 cm olduğuna göre, cosα kaçtır?

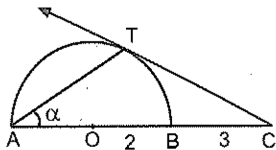
9.



Şekildeki ikizkenar ABC üçgeninde,

$|AB| = |AC|$, $m(\widehat{ABC}) = y$ $m(\widehat{BAC}) = x$ **olduğuna göre, cosx kaçtır?**

10.



Şekilde [CT] doğrusu O merkezli yarım çembere T noktasında teğettir.

$m(\widehat{TAC}) = \alpha$ **olduğuna göre, cosα kaçtır?**

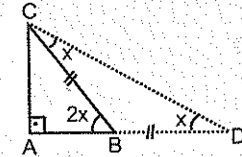
Son olarak şunu vereyim.

2x in trigonometrik oranı verilince x in oranlarını bulmanın pırt yolu da var.
Ama 2x dar açıysa tabii ki ☺

Pırt. çözüm yolu şu☺

2x dar açı olmak üzere,
2x in trigonometrik oranı belli iken x in trigonometrik oranı dik üçgen yardımıyla kolayca bulunabiliyor.
'Nasıl yani?"derseniz. Bakın bi.

Önce bir dik üçgen (ABC üçgeni) çizin. Sonra dik kenarlardan birini hipotenüs kadar uzatın ve üçgen dışında bir ikizkenar üçgen oluşturun... Gerisi kolay☺☺



Anladınız mı?

11. $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ olmak üzere,

$$\tan 2x = \frac{3}{4}$$

olduğuna göre, tan x kaçtır?

12. $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ olmak üzere,

$$\cos 2x = \frac{3}{5}$$

olduğuna göre, tan x kaçtır?

Dönüşüm Formülleri

Bunlar biraz daha uzun gibi. Ama dediğim şekilde öğrenirseniz çok da zor değiller.
Dönüşüm formülü denen şeyler☺ toplam ya da fark biçiminde verilen ifadeleri çarpım haline dönüştürmeye yarıyor.

TAC! FFS! muhabbeti

$$\sin A + \sin B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right).\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right).\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\sin A - \sin B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right).\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A - \cos B = -2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right).\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Biliş gerek ☺

Bu formüller de toplam ve fark formüllerinden elde edilmiş. Meraklıları için mail adresimi biliyorsunuz.☺

Formüllere dikkat ettiniz mi?
Bir kere ikisi ya sin sin ya da cos cos ile başlıyor. Ve kat sayıları da 1. Yani, **biri sin diğeri cos iken bu formülleri kullanamazsınız.**
Şuna da dikkat edin. Hepsinin başında 2 var. Sadece cos – cos daki – 2 o kadar. Ve hepsinde ilk önce $\frac{A+B}{2}$ sonra da $\frac{A-B}{2}$ var ve araları da çarpı☺
Bu izahatları tekrar okuyarak ne dediğimi üstteki formüllerde de görün isterseniz.
Neyse geleyim şu saçma sapan! (Ama işe yarıyor işte☺ TAC ve FFS muhabbetine☺
Belki aklınızda kalır diye bahsediyorum.
Bir ihtimali olması bile güzel.☺

Toplamlar, **A**ynı başlar **C**osinüsle biter.

Farklar, **F**arklı başlar **S**inüsle biter.

Örnek vereyim.

Örnek Soru

$$\frac{\cos 7x - \cos 3x}{\sin 6x + \sin 4x}$$

ifadesinin en sade biçimi nedir?

Çözelim☺
İlk önce toplam mı? Fark mı? Ona bakın.
Eğer toplamsa(Arada artı varsa☺) TAC olayı. Yani aynı fonksiyonla başlayın ve cos la bitirin. Ama fark ise (Arada eksi varsa☺) farklı fonksiyonla başlayın. sin ile bitirin.
Uygulayın bakalım.
İlk önce $\cos 7x - \cos 3x$ e bakın. FFS olayı. Değil mi?
O zaman farklı başlayıp sin le bitireceksiniz.
Bir de cos – cos un başı – 2 idi. Bunu da unutmayın.

$$\cos 7x - \cos 3x = -2\sin\frac{7x+3x}{2}.\sin\frac{7x-3x}{2}$$
$$= -2\sin 5x.\sin 2x$$

$\sin 6x + \sin 4x$ te ise TAC uygulayacaksınız. Değil mi?.
Arada artı var.☺ Aynı başlayın cos la bitirin.

$$\sin 6x + \sin 4x = 2\sin\frac{6x+4x}{2}.\cos\frac{6x-4x}{2}$$
$$= 2\sin 5x.\cos 2x$$

Şimdi de bulduğunuz bu ifadeleri yerine yazın ve sadeleştirerek sonucu – tan2x bulun.☺

1. $\dfrac{\cos 40^\circ + \cos 20^\circ}{\sin 80^\circ}$

ifadesinin eşiti nedir?

2. $\dfrac{\cos 100^\circ - \cos 40^\circ}{\sin 70^\circ}$

ifadesinin eşiti nedir?

3. $\frac{\sin 36^\circ + \sin 24^\circ}{2\sin 3^\circ \cos 3^\circ}$

ifadesinin eşiti nedir?

4. $\frac{\sin 80^\circ - \sin 70^\circ}{\sin 5^\circ}$

ifadesinin eşiti nedir?

5. $\frac{\cos 5x + \cos 3x}{\cos 4x}$

işleminin sonucu nedir?

6. $\frac{\cos 9x - \cos x}{\sin 4x}$

işleminin sonucu nedir?

7. $\frac{\sin 4A + \sin 2A}{\sin 3A} = \frac{1}{2}$

olduğuna göre, cos2A kaçtır?

8. $\frac{\cos 50^\circ}{\cos 20^\circ + \cos 80^\circ}$

işleminin sonucu nedir?

9. $\frac{\sin 40^\circ + \sin 50^\circ}{\cos 40^\circ + \cos 50^\circ}$

işleminin sonucu kaçtır?

10. $\frac{\cos 3x + \cos 9x}{\sin 3x + \sin 9x}$

ifadesinin en sade biçimi nedir?

1. $\frac{\sin 5x - \sin x}{\cos 5x + \cos x}$

ifadesinin en sade biçimi nedir?

2. $\frac{\sin 3A + \sin A}{\cos 5A - \cos A}$

ifadesinin en sade biçimi nedir?

3. $\frac{\sin 6x - \sin 2x}{\cos 3x \cos x - \sin 3x \sin x}$

ifadesinin en sade biçimi nedir?

4. $\frac{\sin 78^\circ + \sin 50^\circ}{\cos 14^\circ . \cos 26^\circ}$

işleminin sonucu kaçtır?

5. $11x = \frac{\pi}{2}$ olmak üzere

$\frac{\sin 5x + \sin 7x}{\cos x . \cos 5x}$

işleminin sonucu kaçtır?

6. $x = \frac{\pi}{11}$ olmak üzere

$\frac{\sin 8x + \sin 4x}{\sin 7x + \sin 3x}$

işleminin sonucu kaçtır?

7. $8x = \pi$ olmak üzere

$\frac{\sin 9x - \sin x}{\sin 7x + \sin x}$

işleminin sonucu kaçtır?

8. $11x = \pi$ olmak üzere

$\frac{\cos 9x + \cos 5x}{\sin 6x - \sin 2x}$

ifadesinin eşiti nedir?

Eğer toplam veya fark durumunda üç ifade olursa en küçüğü ile en büyüğü arasında dönüşüm formülü kullanmak en mantıklısı. Benden demesi☺ Ama daha pırt bir şeyler isterseniz buyurun bakalım.

Pırt. yol

Eğer $b=\dfrac{a+c}{2}$ ise,

$$\frac{\sin ax+\sin bx+\sin cx}{\cos ax+\cos bx+\cos cx}=\frac{\sin bx}{\cos bx}=\tan bx$$

Meselâ,

$$\frac{\sin 2x+\sin 7x+\sin 12x}{\cos 2x+\cos 7x+\cos 12x}=\frac{\sin 7x}{\cos 7x}=\tan 7x \text{ tir.}$$

Yani, açıları küçükten büyüğe sıraladığınızda ortadakilerin oranına eşit oluyor.

9. $\dfrac{\cos 10^\circ+\cos 40^\circ+\cos 70^\circ}{\sin 10^\circ+\sin 40^\circ+\sin 70^\circ}$

işleminin sonucu nedir?

10. $\dfrac{\sin x+\sin 5x+\sin 9x}{\cos x+\cos 5x+\cos 9x}$

ifadesinin eşiti nedir?

11. $\dfrac{\cos 3x+\cos 6x+\cos 9x}{\sin 3x+\sin 6x+\sin 9x}$

işleminin sonucu nedir?

12. $\dfrac{\sin x+\sin 4x+\sin 7x}{\cos x+\cos 4x+\cos 7x}$

işleminin sonucu nedir?

13. $\dfrac{\cos 2x-\cos 5x+\cos 8x}{\sin 2x-\sin 5x+\sin 8x}$

işleminin sonucu nedir?

14. $\tan 4x=m$

olduğuna göre, $\dfrac{\cos 3x+\cos 4x+\cos 5x}{\sin 3x+\sin 4x+\sin 5x}$ **in m türünden değeri nedir?**

15. $x+y=\dfrac{2\pi}{3}$ olmak üzere

$\dfrac{\cos x-\cos y}{\sin y-\sin x}$

ifadesinin değeri kaçtır?

Trigonometrik Denklemler

Burada yeni bir şey yok.
Trigonometrik denklemleri çözerken 30°, 45° ve 60° nin trigonometrik oranlarını ve birim çemberde bölgeleri ve bu bölgelerde işaretleri bilmek lâzım.
Tek tek ele alıp trigonometrik denklemlerin çözümündeki mantığı izah edeyim.

cos x = a eşitliğini sağlayan x değerlerini bulma

İlk önce birim çemberdeki bölgeleri düşünerek kosinüs değeri a ya eşit olan açıları bulun. Bulacağınız değerler x in değerleridir. Yani, denklemin kökleri.
Sonra da bulduğunuz değerlere fonksiyonun periyodunu ekleyerek diğer kökleri bulun.(Demek ki periyot bulmayı biliyor olmanız gerekiyormuş.☺)
Bu mantığı bütün trigonometrik denklem çözümlerinde kullanabilirsiniz.

Örnek Soru

$0<x<2\pi$ **olmak üzere,**

$$\cos 2x=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

Çözelim☺
Fena soru sayılmaz. Olayın mantığını anlayabileceğiniz iyi bir soru.
İlk önce periyodu bulun. Sonra da x değerlerini. Ve bulduğunuz bu değerlere periyodu ekleyerek diğer kökleri (x değerlerini) bulun.
cos2x in periyodu $\dfrac{2\pi}{2}=\pi=180^\circ$. Bu bir.
Gelelim x in değerlerini bulmaya.
Bir kere cos değeri eksi. Demek ki açı ikinci bölgede veya üçüncü bölgede. Ve cos değeri $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ olan açı 30° yani $\dfrac{\pi}{6}$. Bunları not edin bakalım ilk önce.
İkinci bölgede 30° ye karşılık gelen açı 150° dir. (180° – 30° = 150° dir.)
Üçüncü bölgede ise 180° + 30° = 210° dir.
İşin zor tarafı burası aslında. Gerisi kolay.
cos2x = cos150° den x = 75° yi bulun. Sonra da buna fonksiyonun periyodunu ekleyerek
x = 75° + 180° = 255° yi bulun. (Periyodu eklemeye devam edin. Aynı değeri bulunca durusunuz.)
Üçüncü bölgedeki 210° için ise

cos2x = cos210° den x = 105° çıkıyor. Bu değere periyodu ekleyince ise x = 105° + 180° = 285° bulunuyor.
Ve çözüm kümesi = {75°, 105°, 255°, 285° }
Çözüm kümesi böyle bulunuyor. Ama denklemlerde genellikle x in en küçük değeri soruluyor. En küçük değer sorulduğunda çoğu zaman periyot eklemenize gerek kalmaz. Bulduğunuz ilk değer aradığınız değer olur.

1. $\cos x=\dfrac{1}{2}$

denklemini sağlayan en küçük x açısı kaç derecedir?

2. $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ **olmak üzere,**

$\cos 2x=\dfrac{1}{2}$

olduğuna göre, x açısı kaç radyandır?

3. $\cos 6x=-1$

olduğuna göre en küçük x dar açısı kaç derecedir?

4. $10\cos x + 5 = 0$

olduğuna göre en küçük x açısı kaç derecedir?

5. $\cos 4x = \sin 10^\circ$

olduğuna göre, x açısının en küçük değeri kaç derecedir?

6. $\dfrac{\sqrt{3}}{\cos x} = -2$

olduğuna göre en küçük x açısı kaç derecedir?

7. $\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{\pi}{3}$

olduğuna göre, x açısının en küçük değeri kaçtır?

sinx = a denkleminin çözümü

cosx = a denklemindeki mantıkla aynı.
Yine ilk önce sinüsü a ya eşit olan açıları bulun. Sonra bulduğunuz değerlere periyodu ekleye ekleye gidin. Başa gelince de durun.

8. $2\sin x - 1 = 0$

denklemini sağlayan, en küçük x açısı kaç derecedir?

9. $\sin 2x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

olduğuna göre, en küçük x dar açısı kaç radyandır?

10. $\sin 5x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

olduğuna göre en küçük x dar açısı kaç derecedir?

11. $\sin\left(2x + 20^\circ\right) = \sin 80^\circ$

eşitliğini doğrulayan en küçük x açısı kaç derecedir?

1. $\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$

eşitliğini doğrulayan en küçük x açısı kaç derecedir?

2. $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ olmak üzere,

$$\cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$$

olduğuna göre, x dar açısı kaç derecedir?

3. $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ olmak üzere,

$$\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x} = 4$$

olduğuna göre, en küçük x dar açısı nedir?

4. $0 < x < \dfrac{\pi}{3}$ olmak üzere,

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{16}{3}$$

olduğuna göre, x kaçtır?

tan x = a ve cot x = a denklemlerinin çözümü

tan ya da cot. İkisi de aynı şekilde çözülüyor. Ve ikisinin de çözüm kümesi aynı şekilde bulunuyor.
İlk önce fonksiyonun periyodunu bulun. Sonra en küçük x değerini. Sonra da buna periyodu ekleye ekleye devam edin.

Örnek Soru

$$\tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

denkleminin [0,2π] deki çözüm kümesi nedir?

Çözelim☺

İlk önce periyodu bulun. Periyot $\dfrac{\pi}{2}$.

İkinci olarak şunu düşünün. tan değeri $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ olan en küçük açı hangisi?

$\dfrac{\pi}{6}$ dediniz diyelim☺

Artık x in değerlerini yazmaya başlayabilirsiniz.

$2x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6}$ dan $x = \dfrac{\pi}{4}$. x in diğer değerleri ise buna periyodu ekleye ekleye bulacağınız

$\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{4}$

$\dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{5\pi}{4}$

$\dfrac{5\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{7\pi}{4}$

$\dfrac{7\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{9\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}$ başa döndü. Burada durun.

Ve çözüm kümesini $\left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right\}$ olarak bulursunuz.

5. $0 < x < 90^o$ olmak üzere,

$\tan x = 1$

olduğuna göre, x dar açısı kaç derecedir?

6. $\tan 3x = \sqrt{3}$

olduğuna göre, en küçük x açısı kaç derecedir?

7. $\cot 5x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

olduğuna göre, en küçük x dar açısı kaç derecedir?

8. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere,

$\frac{1 + \tan x}{1 + \cot x} = \sqrt{3}$

olduğuna göre, x açısı kaçtır?

9. $0 < x < 360^o$ olmak üzere,

$\sin x = \sin 50^\circ$

olduğuna göre, x açısı kaç farklı değer alır?

10. $0^o < x < 360^o$ olmak üzere,

$\sin(2x + 10^o) = \sin 80^o$

olduğuna göre, x açısının alabileceği en küçük değer kaç derecedir?

1. $0^\circ < x < 360^\circ$ olmak üzere,

$\cos(5x - 20^o) = \cos(3x - 60^o)$

olduğuna göre x açısının alabileceği en küçük değer kaç derecedir?

2. $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$

olduğuna göre, x dar açısı kaç derecedir?

3. $0^\circ < x < 90^o$ olmak üzere,

$\frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 4$

olduğuna göre, x açısı kaç derecedir?

4. $\tan x + \cot x = 4$

olduğuna göre, en küçük x açısı kaç derecedir?

5. $\frac{\cot x + \frac{1}{\sin x}}{\sin^2 x} = \frac{2}{1 - \cos x}$

olduğuna göre, x dar açısı kaç derecedir?

6. $0^\circ < x < 180^\circ$ olmak üzere,

$\cot(5x - 70^o).\tan(2x - 40^o) = 1$

olduğuna göre, en küçük x dar açısı kaç derecedir?

7. $0 < x < 360^{\circ}$ olmak üzere,

$$\cos^2 x - 2\cos x + \sin^2 x = 0$$

olduğuna göre x in alabileceği en küçük açı kaç derecedir?

8. $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ olmak üzere,

$$\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$$

olduğuna göre, x açısının ölçüsü kaç radyandır?

9. $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ olmak üzere,

$$3\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$$

olduğuna göre, x değeri kaçtır?

10. $\cos x - \tan\frac{\pi}{4} \cdot \sin x = 1$

denkleminin $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ **aralığındaki kökü nedir?**

11. $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ olmak üzere,

$$\sin x + \tan\frac{\pi}{3} \cdot \cos x = 1$$

olduğuna göre, x değeri nedir?

12. $30^{\circ} < x < 90^{\circ}$ olmak üzere,

$$\frac{\sin 5x}{\sin x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} = 2$$

olduğuna göre, x değeri kaçtır?

Karmaşık Sayılar

Bir milletin büyüklüğü, nüfusunun çokluğu ile değil, akıllı ve fazilet sahibi adamlarının sayısı ile belli olur.

Victor Hugo

KARMAŞIK SAYILAR

Çok kolay. Ama biraz değişik bir konu. Daha önceki konularda olmayan sanal sayılar var burada.☺

Negatif sayıların karekökleri söz konusu olduğunda önünüze çıkan $\sqrt{-1}$ e sanal sayı birimi demişler. Ve buradaki bütün olayı bunun üzerine bina etmişler.

Şöyle ki, $\sqrt{-1} = i$ kabul edilince $i^2 = -1$ olur.

Meselâ,

$\sqrt{-9} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = 3 \cdot i$ dir. Aynı şekilde

$\sqrt{-20} = 2\sqrt{5} \cdot i$ dir.

İlk önce bu kısmı kafanızda netleştirin bi.

1. $\sqrt{-1} = i$ olmak üzere,

$\sqrt{-4}$

ifadesinin eşiti nedir?

2. $\sqrt{-1} = i$ olmak üzere,

$\sqrt{-8}$

ifadesinin eşiti nedir?

3. $\sqrt{-1} = i$ olmak üzere,

$\sqrt{-3} + \sqrt{-12}$

işleminin sonucu kaçtır?

4. $\sqrt{-1} = i$ olmak üzere,

$\sqrt{-4} . \sqrt{16}$

işleminin sonucu kaçtır?

5. $\sqrt{-1} = i$ olmak üzere,

$\sqrt{-1} . \sqrt{5}$

işleminin sonucu kaçtır?

6. $\sqrt{-1} = i$ olmak üzere,

$\sqrt{-25} + \sqrt{-9} - \sqrt{-1}$

işleminin sonucu nedir?

7. $\sqrt{-1} = i$ olmak üzere,

$\sqrt{-1} . \sqrt{-4}$

işleminin sonucu kaçtır?

8. $\sqrt{-1} = i$ olmak üzere,

$\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9} + \sqrt{16}$

işleminin sonucu nedir?

9. $\sqrt{-1} = i$ olmak üzere,

$$\frac{\sqrt{-49} + \sqrt{-81}}{\sqrt{-9} - \sqrt{-1}}$$

işleminin sonucu nedir?

i nin kuvvetleri

i^2 nin -1 e eşit olmasından hareketle i nin kuvvetlerini hesaplayabilirsiniz.

Örneğin, i^{14} ün eşitini $\left(i^2\right)^7 = (-1)^7 = -1$ şeklinde bulabilirsiniz. Anlayacağınız birazcık üslü ifade bilginiz varsa sıkıntı yok.
Ama isterseniz genelleme yapabilirsiniz de.

$i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = i^2 \cdot i = -i$
$i^4 = (i^2)^2 = 1$

Peki, siz de i^{61} in eşitini bulun bakalım.
Ne buldunuz?
i değil mi?
Nasıl buldunuz bilmiyorum. Ama uzatmadan şunu söyleyeyim. **i nin kuvvetlerini hesaplarken şunu yapın. Üs 4 ten büyükse üssü 4 e bölün ve kalanı yeni üs olarak yazın.**

Mesela, i^{103} yerine 103 ün 4 e bölümünden kalan 3 olduğundan $i^{103} = i^3$ yazabilirsiniz.

Zaten $i^3 = -i$ olduğundan $i^{103} = -i$ ye eşit olur.

Bu arada unutanlar için hatırlatmakta fayda var. **Bir sayının 4 e bölümünden kalan son iki basamağının 4 e bölümünden kalana eşitti.**

10. $i^2 = -1$ olmak üzere,

i^7

ifadesinin eşiti nedir?

11. $i^2 = -1$ olmak üzere,

i^{52}

ifadesinin eşiti nedir?

12. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$i^{15} + i^{35}$

ifadesinin eşiti nedir?

13. $i^2 = -1$ olmak üzere,

i^{2013}

ifadesinin eşiti nedir?

14. $i^2 = -1$ olmak üzere,

i^{1453}

ifadesinin eşiti nedir?

15. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$i^{1967} + i^{1461}$

işleminin sonucu nedir?

16. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$i^{33} + i^{44} + i^{55}$

işleminin sonucu nedir?

i nin üssü negatif olursa...

Üs pozitifmiş gibi işlem yapın. Ve kalanı bulun. Ama yeni üs olarak bulduğunuz kalanı 4 ten çıkarıp öyle yazın.

1. $i^2 = -1$ olmak üzere,

i^{-17}

ifadesinin eşiti nedir?

2. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$i^{-43} + i^{-25}$

işleminin sonucu nedir?

3. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$i^{-125} + i^{-126} + i^{-127}$

işleminin sonucu nedir?

Üs k ya filan bağlı verilirse k nin kat sayısına bakın eğer 4 ün katıysa k li terimleri hesaba katmadan işlem yapın. Korkmayın☺ yanlış çıkmaz. Ne de olsa tecrübeye güvenmek lâzım.
Örneğin, k tam sayısı için i^{8k+13} yerine i^{13} almakta bi sakınca yok.

4. $i^2 = -1$ ve $k \in Z^+$ olmak üzere,

i^{4k+71}

ifadesinin eşiti nedir?

5. $i^2 = -1$ ve n pozitif tam sayı olmak üzere,

i^{4n-5}

ifadesinin eşiti nedir?

6. $i^2 = -1$ ve n pozitif tam sayı olmak üzere,

i^{-20n+1}

ifadesinin eşiti nedir?

7. $i^2 = -1$ ve n pozitif tam sayı olmak üzere,

i^{12n-3}

ifadesinin eşiti nedir?

8. $i^2 = -1$ ve k pozitif tam sayı olmak üzere,

i^{24k+18}

ifadesinin eşiti nedir?

9. $i^2 = -1$ ve k pozitif tam sayı olmak üzere,

i^{32k-30}

ifadesinin eşiti nedir?

10. $i+i^2+i^3+i^4+...+i^{27}$

işleminin sonucu nedir?

11. $i+i^2+i^3+i^4+...+i^{503}$

işleminin sonucu nedir?

12. $i^2=-1$ olmak üzere,

$i+i^2+i^3...+i^{2012}$

işleminin sonucu nedir?

13. $i^{-1}+i^{-2}+i^{-3}+i^{-4}+...+i^{-99}$

işleminin sonucu nedir?

14. $i^2=-1$ olmak üzere,

$i^{-1}+i^{-2}+i^{-3}...+i^{-2012}$

işleminin sonucu nedir?

15. $i^2=-1$ olmak üzere,

$1+i^4+i^8...+i^{2012}$

işleminin sonucu nedir?

16. $f(x)=1+x^2+x^4+x^6+x^8$

olduğuna göre, f(– i) değeri nedir?

17. $f(x)=1+x+x^2+x^3+....+x^{61}$

olduğuna göre, f(i) değeri nedir?

Karmaşık sayı

$\sqrt{-1}=i$ olmak üzere, z = a + bi biçiminde yazılan sayılara karmaşık sayı denilmiş.

z = a + bi sayısında a ya reel kısım, b ye imajıner (sanal) kısım denir.

Re(z) = a ve İm(z) = b biçiminde gösterilir.

1. z = 1 + 2i

olduğuna göre, Re(z) – İm(z) farkı kaçtır?

2. w = 4 – 2i

olduğuna göre, Re(w).İm(w) çarpımı kaçtır?

3. z = 2x + (3x – 1)i olmak üzere,

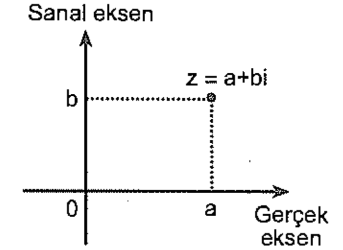
Re(z) = 4 olduğuna göre, İm(z) kaçtır?

4. z = a + 2 – (2a – 3)i olmak üzere,

İm(z) = – 5 olduğuna göre, Re(z) kaçtır?

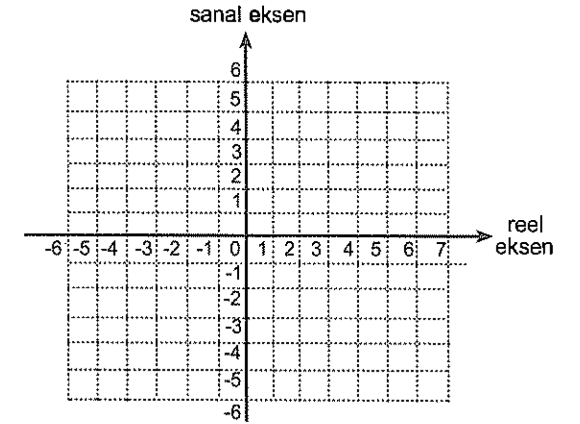
Karmaşık Düzlem

Karmaşık düzlemde z = a + bi sayısı aşağıdaki gibi gösterilir.



Her karmaşık sayı karmaşık düzlemde bir noktaya karşılık gelir.

Örneğin, z = 2 + 4i sayısı koordinat düzleminde (2,4) noktasına karşılık gelir.



Aşağıdaki karmaşık sayıları yukarıdaki karmaşık düzlemde gösteriniz☺

a) $z_1 = 2 + 3i$

b) $z_2 = -2 - 4i$

c) $z_3 = 3 - 2i$

d) $z_4 = -5 + 4i$

e) $z_5 = 6 + 5i$

f) $z_6 = -i$

g) $z_7 = -2$

h) $z_8 = 3$

i) $z_9 = -3i$

Karmaşık Sayının Eşleniği

$z = a + bi$ sayısının sanal kısmının işareti değiştirilerek elde edilen $\overline{z} = a - bi$ sayısı z nin eşleniğidir.

5. Aşağıdaki karmaşık sayıların eşleniği nedir?

a) $z_1 = 2 - 3i$ b) $z_2 = -2 + 4i$

c) $z_3 = 3i$ d) $z_4 = -5$

Karmaşık Sayılarda İşlemler

Toplama- Çıkarma

İki karmaşık sayı toplarken i li kısımları kendi arasında i sizleri de kendi arasında toplayın. (Çıkarmaysa çıkarın tabii ki☺)

6. $z = 3 + 4i$
$u = -5 + 2i$
olduğuna göre, aşağıdaki işlemlerin sonucu nedir?

a) $z + u$

b) $z - \overline{u}$

7. $z = 5 - 3i$
$w = 2 + 9i$
olduğuna göre, $z + \overline{w}$ işleminin sonucu nedir?

8. $z = 3 + i$
$w = 1 - 3i$
olduğuna göre, z – w işleminin sonucu nedir?

9. $z = 5 + 2i$
$w = 4 + 6i$
olduğuna göre, 2z – 3w işleminin sonucu nedir?

10. $z = 3 + i$
olduğuna göre, $2z + \overline{z}$ işleminin sonucu nedir?

11. $z = 3 + i$
$u = 1 - 3i$
olduğuna göre, z + u toplamının sonucu nedir?

Çarpma

Hiçbir özelliği yok.
İki karmaşık sayıyı çarparken dağılma özelliğini kullanın. Ve sonucu düzenleyin.
Ama düzenlerken $i^2 = -1$ yazmayı da unutmayın.

1. $(1 + 2i)(2 - 3i)$
işleminin sonucu nedir?

2. $i(1 - 3i) + 2(2 - i)$
işleminin sonucu nedir?

3. $z = 3 + i$
$u = 4 - 3i$
olduğuna göre, z.u çarpımı neye eşittir?

4. $z = 1 + 2i$
$w = 1 - 2i$
olduğuna göre, $z.\overline{w}$ kaçtır?

5. $z = 2 + i$
$w = 1 - i$
olduğuna göre, $z.w^2$ kaçtır?

6. $z = 5 + i$
$w = 1 - 3i$
$u = 2i$
olduğuna göre, z + u.w işleminin sonucu nedir?

7. $z = 1 + i$
$w = 2 - 4i$
$u = -1 - 3i$
olduğuna göre, z.u + 2w işleminin sonucu nedir?

8. $z = 3 - 2i$
olduğuna göre, $(1 + 2i) \cdot \overline{z}$ işleminin sonucu nedir?

9. $(1+i)(1+i^2)(1+i^3)$
işleminin sonucu kaçtır?

1 + i ve 1 – i nin kuvvetlerini hesaplarken
$(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 2i$ ve $(1-i)^2 = 1-2i+i^2 = -2i$
den faydalanın.
Meselâ
$(1+i)^5 = \left[(1+i)^2\right]^2(1+i) = (2i)^2(1+i) = -4-4i$ dir.

10. $(1+i)^2 + (1-i)^2$
işleminin sonucu kaçtır?

11. $(1-i)^3 - (1+i)^3$
işleminin sonucu kaçtır?

12. $(1-i)^4 + (1+i)^4$
işleminin sonucu kaçtır?

13. $(1-i)^5 + (1+i)^5$
işleminin sonucu kaçtır?

14. $(1-i)^6 - (1+i)^6$
işleminin sonucu kaçtır?

15. $(1+i)^5 \cdot (1-i)^6$
işleminin sonucu kaçtır?

Bir karmaşık sayı ile eşleniğinin çarpımı reel sayıdır. Ben denedim hep reel çıkıyor gerçekten. Siz de deneyin isterseniz☺
$z = a + bi$ ise $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$ dir. Çarpıp görün bunu. İsterseniz tabii ki☺

16. $z = 2 - 5i$
olduğuna göre, $z.\overline{z}$ kaçtır?

1. $(3+2i)\cdot(3-2i)$
işleminin sonucu kaçtır?

2. $(-2+4i)\cdot(-2-4i)$
işleminin sonucu kaçtır?

3. $\dfrac{(3+i)\cdot(3-i)}{(1+2i)(1-2i)}$
işleminin sonucu kaçtır?

4. $(2-i)^3 \cdot (2+i)^3$
işleminin sonucu kaçtır?

Bölme

Bir kere şunu en başta söyleyeyim. Karmaşık sayılarda paydada i li ifade bırakılmaz. Onun için iki karmaşık sayıyı bölerken pay ve paydayı paydanın eşleniği ile çarpın ve paydayı i li sayılardan kurtarın. Anlayacağınız bütün olay paydayı i lerden kurtarmak.

Örnek Soru

$z = \dfrac{1+2i}{3-i}$

olduğuna göre, Re(z) kaçtır?

Çözelim☺
Mevcut durumda z nin reel kısmı filan gözükmüyor. Zaten payda i li verilmiş. İlk iş paydayı ve payı paydanın eşleniği ile çarpmak. Zaten başkada bi şey yok☺
Çarpalım bakalım.

$\dfrac{1+2i}{\underset{(3+i)}{3-i}} = \dfrac{(3+i)(1+2i)}{3^2+1^2}$ olur.

Artık bunu düzenleyip z yi $z = \dfrac{1+7i}{10} = \dfrac{1}{10} + \dfrac{7}{10}i$

olarak bulur ve $Re(z) = \dfrac{1}{10}$ olduğunu görürsünüz☺

5. $\dfrac{4+3i}{2+5i}$
işleminin sonucu nedir?

6. $z = \dfrac{1}{1-i}$
olduğuna göre, Re(z) kaçtır?

7. $z = \frac{3-4i}{1-i}$

olduğuna göre, Re(z) kaçtır?

8. $w = \frac{2+i}{2-i}$

olduğuna göre, Re(w) + İm(w) toplamı kaçtır?

9. $z = \frac{1-2i}{10}$

sayısının çarpma işlemine göre tersinin reel kısmı kaçtır?

10. $z = \frac{1}{1-i} + \frac{1}{1+i}$

olduğuna göre, Re(z) kaçtır?

11. $\frac{3}{2-i} + 1 - i$

işleminin sonucu nedir?

12. $\frac{1}{1-2i} - \frac{1}{1+2i}$

işleminin sonucu nedir?

13. $\frac{5}{3-i} + \frac{5}{3+i}$

işleminin sonucu kaçtır?

14. $\frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i}$

işleminin sonucu kaçtır?

1. $z = \frac{1}{1-2i} + 2i$

olduğuna göre, İm(z) kaçtır?

2. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{10} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{14}$

işleminin sonucu nedir?

3. k tam sayı olmak üzere

$\frac{i^{8k-2}}{2-i^{4k-3}}$

karmaşık sayısının reel kısmı kaçtır?

4. z = 1 – 2i olmak üzere,

$\frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}}$

ifadesinin eşiti nedir?

İki Karmaşık Sayının Eşitliği

$z_1 = a + bi$ ve $z_2 = c + di$ sayıları eşit ise reel kısımları ve sanal kısımlarının eşit olması gerekir.
Yani, a = c ve b = d olması gerek.

Burası kesinlikle çok önemli. İyi öğrenmek lâzım.

5. $z_1 = a + bi$

$z_2 = 4 + 3i$

olmak üzere, $z_1 = z_2$ olduğuna göre, a + b toplamı kaçtır?

6. $z_1 = a - 1 + (b + 1)i$

$z_2 = 4 + 3i$

olmak üzere, $z_1 = z_2$ olduğuna göre, a + b toplamı kaçtır?

7. 2x + y + 3i – yi = x + 8 – 2i

olduğuna göre, x.y çarpımı kaçtır?

8. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$z = x + 1 + (y - 2)i$
$w = -5 + 4i$

z = w olduğuna göre, x – y farkı kaçtır?

9. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$z = x + (y + 1)i$
$u = (1 - 2i)^2$

u = z olduğuna göre, x + y kaçtır?

10. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$z = 5 + (a - b - 4)i$
$w = 4i + 2a + b + 1$

z = w olduğuna göre, a.b kaçtır?

11. $z = x + yi$ olmak üzere,

$z(1 + i) = i - \overline{z}$

eşitliğini sağlayan z karmaşık sayısı nedir?

12. $z = x + yi$ olmak üzere,

$iz + 2i - 1 = 3.\overline{z} + 4$

olduğuna göre, Re(z) + İm(z) toplamı kaçtır?

13. $z = x + yi$ olmak üzere,

$2z - 4i + \overline{z} - 1 = 0$

olduğuna göre, $\frac{y}{x}$ oranı kaçtır?

14. $z = x + yi$ olmak üzere,

$z + \overline{z} + iz = 5 - 3i$

olduğuna göre, x + y toplamı kaçtır?

15. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$\sqrt{x + y} + yi = 3 + 2i$

olduğuna göre, x kaçtır?

1. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$\sqrt{x^2 + y^2} + x + yi = 2 - 4i$

olduğuna göre, x kaçtır?

2. $z = a + bi$ olmak üzere,

$\sqrt{z.\overline{z}} + z = 4 - 3i$

olduğuna göre, a kaçtır?

3. $z = x + yi$ olmak üzere,

$\sqrt{z \cdot \overline{z}} - z = 1 + 2i$

olduğuna göre, Re(z) kaçtır?

4. $x^2 + ax + b = 0$

denkleminin bir kökü 3 – 2i olduğuna göre, b kaçtır?

5. $P(x) = x^2 + ax + b$

polinomunun bir kökü 1 + 2i olduğuna göre a + b toplamı kaçtır?

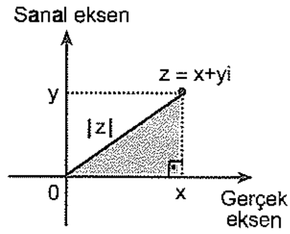
6. $P(x) = x^3 - 3x^2 + ax + b$

polinomu x – i ile tam bölündüğüne göre, a.b çarpımı kaçtır?

Karmaşık Sayının Mutlak Değeri (Modülü)

Hatırlayın. Mutlak değer bir uzunluktu. Burada da aynı. Bir karmaşık sayının mutlak değeri (modülü), karmaşık düzlemde bu sayıya karşılık gelen noktanın orijine olan uzaklığıdır. z karmaşık sayısının mutlak değeri $|z|$ ile gösterilir.

Şekil üzerinde göstereyim.



$z = x + yi$ ise $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ dir.

Yani, reel ve sanal kısımların karesini alıp topluyor sonra da karekökünü alıyorsunuz.

Örnek Soru

z = 5 + 12 i olduğuna göre, $|z|$ kaçtır?

Çözelim☺

z nin reel ve sanal kısımlar belli. Karelerini alıp toplayın ve sonrada karekökünü alın. Yazıyla uzun gibi. Ama dediğim şu.

$|z| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ tür.

Var mı bi sıkıntı? ☺

7. $z = 3 + 4i$

sayısının mutlak değeri kaçtır?

8. $u = \sqrt{3} + \sqrt{6}i$

sayısının karmaşık düzlemde belirttiği noktanın orijine uzaklığı kaç birimdir?

9. $z = 2 - 4i$

olduğuna göre, z karmaşık sayısının orijine uzaklığı kaç birimdir?

10. $z = 3 - 4i$

olduğuna göre, $|z|$ kaçtır?

11. $z = 4i$

olduğuna göre, $|z|$ kaçtır?

12. $z = -2$

olduğuna göre, $|z|$ kaçtır?

13. $|8 - 6i| + |12 - 5i|$

işleminin sonucu kaçtır?

1. $|2 - i| \cdot |2 + 4i|$

işleminin sonucu kaçtır?

2. $\dfrac{|6 + 8i|}{|4 - 3i|}$

işleminin sonucu kaçtır?

3. $z = x + 7i$ olmak üzere,

$|z| = 5\sqrt{2}$

olduğuna göre, x in pozitif değeri kaçtır?

4. $z = x + (x - 1)i$ olmak üzere,

$|z| = 5$

olduğuna göre, x in pozitif değeri kaçtır?

5. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$z = \cos x + i\sin x$

olduğuna göre, $|z|$ kaçtır?

Şimdi söyleyeceğim şey çok önemli. Daha öncekiler gibi.☺ Karmaşık sayının mutlak değeri bulunurken çarpım, bölüm biçiminde verilen karmaşık sayılarda sayılar çarpılmaz. Bölünmez. Ve de üsler alınmaz. Ya?
Önce parantez içindeki sayıların tek tek mutlak değeri bulunur. Sonra da çarpma - bölme yapılır. Ve eğer varsa üs alınır.
İki örnekle göstereyim.

Örnek Soru

$z = 3 + 2i$

olduğuna göre, $|z^{-2}|$ değeri kaçtır?

Çözelim.☺

Şimdi gidip hemen z nin – 2. kuvvetini almayın. Önce z nin mutlak değerini bulun. Sonra da bulduğunuz sayının – 2. kuvvetini alın.
Yani şöyle.

$|z^{-2}| = |z|^{-2} = |3 + 2i|^{-2} = \left(\sqrt{3^2 + 2^2}\right)^{-2}$

Artık bunun da $\frac{1}{13}$ olduğunu yazarsınız herhalde.☺

Örnek Soru

$z = \dfrac{(3 + i)^2}{4 - 3i}$

olduğuna göre, $|z|$ kaçtır?

Çözelim☺

Hemen 3 + i nin karesini almayın. Ve bölmeye girişmeyin.☺ Az önce ne dedim? Mutlak değer bulunurken üs alma, çarpma ve bölmeler en son yapılır.
Biz de öyle yapcaz artık.
Ne yaptığıma dikkat edin.

$|z| = \left|\dfrac{(3 + i)^2}{4 - 3i}\right| = \dfrac{|3 + i|^2}{|4 - 3i|}$

Sonrası kolay☺

Buradan da $|z| = \dfrac{\left(\sqrt{3^2 + 1^2}\right)^2}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \dfrac{10}{5} = 2$ olur.

6. $z = \frac{1-3i}{2+i}$

olduğuna göre, z karmaşık sayısının orijine uzaklığı kaç birimdir?

7. $z = (4-2i)(2+4i)$

olduğuna göre, $|z|$ kaçtır?

8. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$z = (3-2i)(2+3i)$

olduğuna göre, $|z|$ kaçtır?

9. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$z = \frac{3+6i}{2-i}$

olduğuna göre, $|z|$ kaçtır?

10. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$z = \frac{2\sqrt{3}+2i}{1-i}$

olduğuna göre, $|z|$ kaçtır?

11. $z = 3-4i$

olduğuna göre, $|z^{-1}|$ kaçtır?

12. $z = -4+3i$

olduğuna göre, $|z^{-4}|$ kaçtır?

13. $z = 3+i$

olduğuna göre, $|z^{-2}|$ kaçtır?

1. $z = \frac{1+i}{4-4i}$

olduğuna göre, $|z^{-2}|$ kaçtır?

2. $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

olduğuna göre, $|z^9|$ değeri kaçtır?

3. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$z = \frac{x+yi}{y-xi}$

olduğuna göre, $|z|$ kaçtır?

4. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$z = \frac{x+1+2i}{2-(x+1)i}$

olduğuna göre, $|z|$ kaçtır?

5. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$z = \frac{(3+i).(1+i)^3}{1-i}$

olduğuna göre, $|z|$ kaçtır?

6. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$z = \frac{(3+2i)^3}{(1-i)(2-3i)}$

olduğuna göre, $|z|$ kaçtır?

Bu arada $|\overline{z}| = |-z| = |iz| = |z|$ dir.

Bu dediğimi rastgele bi karmaşık sayı için deneyin ve görün isterseniz☺

7. $z = \frac{6+2i}{1-3i}$

olduğuna göre, $|\overline{z}|$ kaçtır?

8. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$z = \frac{(2-i)(3+4i)^2}{-1+2i}$

olduğuna göre, $|\overline{z}|$ kaçtır?

9. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$z = \frac{x+i}{1-xi}$

olduğuna göre, $|-z| + |\bar{z}|$ toplamı kaçtır?

10. $z = x + yi$ olmak üzere,

$z + |z| = 4 + 2i$

olduğuna göre, z sayısının reel kısmı kaçtır?

11. $z = x + yi$ olmak üzere,

$z + 1 - 5i = |z|$

olduğuna göre, $|z|$ kaçtır?

İki karmaşık sayı arasındaki uzaklık

z_1 ve z_2 karmaşık sayıları arasındaki uzaklıktan kasıt, bu sayılara karşılık gelen noktalar arasındaki uzaklıktır. Ve $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$ ile gösterilir.

Yani, z_1 ve z_2 nin farkının mutlak değerini bulacaksınız.

Örnek Soru

Karmaşık düzlemde verilen $z_1 = 6 + 2i$ ve $z_2 = 2 - i$ sayıları arasındaki uzaklık kaç birimdir?

Çözelim☺

z_1 ve z_2 nin farkını alıp sonra da mutlak değerini bulacaksınız.

$|z_1 - z_2| = |(6+2i)-(2-i)| = |4+3i|$ dir.

Bunun da 5 e eşit olduğunu bulursunuz herhalde☺

Yani, $|z_1 - z_2| = 5$ tir.

Var mı anlaşılmayan bi yer?

12. Karmaşık düzlemde verilen,

$z = 2 - 3i$

$w = 3 + i$

sayıları arasındaki uzaklık kaç birimdir?

13. Karmaşık düzlemde verilen,

$z = -1 - \sqrt{3}i$

$w = 1 + \sqrt{3}i$

z ile w karmaşık sayıları arasındaki uzaklık kaçtır?

1. Karmaşık düzlemde verilen z ve w sayıları,

$z = -1 - 3i$

$w = 3 - 5i$

olduğuna göre, $|z - w|$ kaçtır?

2. Karmaşık düzlemde A(4 + i) ve B(2 – i) olmak üzere [AB] nin orta noktasının orijine uzaklığı kaçtır?

3. Karmaşık düzlemde, A(2 + 7i), B(1 – 3i), C(6 – 5i) noktaları veriliyor.

Buna göre, B noktasının [AC] nın orta noktasına olan uzaklığı kaç birimdir?

"... eşitliğini sağlayan z sayılarının geometrik yeri nedir?" gibi sorularda $z = x + yi$ alın ve x ile y arasındaki bağıntıyı bulun. İstenen geometrik yeri bulmuş olacaksınız.

Örnek Soru

$z = x + yi$ olmak üzere,

$|z+2+3i| = |z-i|$

eşitliğini sağlayan z sayılarının geometrik yerinin denklemi nedir?

Çözelim.☺

Bu tür sorularda ilk önce z yerine x + yi yazın. Gerisi gelecek☺

$|x+yi+2+3i| = |x+yi-i|$ yazdıktan sonra düzenleyin bunu ve $|(x+2)+(y+3)i| = |x+(y-1)i|$ şeklinde yazıp mutlak değerleri hesaplayın.

$\sqrt{(x+2)^2+(y+3)^2} = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$

Sonra her iki yanın karesini alıp karekökleri yok edin. Sonra da parantez kareleri açın bakalım ne çıkıyor?

$x + 2y + 3 = 0$ çıkmış olması lâzım.☺ Bu bir doğru denklemidir.

İşte geometrik yer denen şey böyle bi şey☺ Başka türlü bi şey de çıkabilir tabii ki☺

Bir de şunu söyleyelim. $2x - 3y + 6 = 0$, $y - x = 0$ gibi ifadeler bir doğru denklemi,

$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 9$

$x^2 + y^2 = 9$ gibi ifadeler ise birer çember denklemidir.

4. $z = x + yi$ olmak üzere,

$|z - 1| = 1$

eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarının geometrik yerinin denklemi nedir?

5. $z = x + yi$ olmak üzere,

$|z-1| = |z+2|$

eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarının geometrik yerinin denklemi nedir?

6. $z = x + yi$ olmak üzere,

$|z-1| = |z+i|$

eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarının geometrik yerinin denklemi nedir?

7. $z = x + yi$ olmak üzere,

$|z+2| = |z-2i|$

eşitliğini sağlayan z sayılarının geometrik yerinin denklemi nedir?

Karmaşık Sayı Çember İlişkisi

Karmaşık düzlemdeki $z_o = a + bi$ (yeri belli bir sayı) sayısından r kadar uzaklıkta olan $z = x + yi$ (değişken) sayıları, $|z - z_o| = r$ eşitliği ile gösterilir. Bu z sayıları merkezi z_o ve yarıçapı r olan bir çember belirtir.

8. $z = x + yi$ olmak üzere,

$|z| = 3$

eşitliğini sağlayan z sayılarının geometrik yeri nedir?

9. $z = x + yi$ olmak üzere,

$|z| = 2$

olduğuna göre z karmaşık sayılarının geometrik yerinin denklemi nedir?

10. $z = x + yi$ olmak üzere,

$|z - (3 + 5i)| = 2$

eşitliğini sağlayan z sayılarının geometrik yeri nedir?

1. $z = x + yi$ olmak üzere,

$|z - 3 + 4i| = 3$

eşitliğini sağlayan z sayılarının geometrik yerinin denklemi nedir?

2. $z = x + yi$ olmak üzere,

$|z + 2 - 2i| = 4$

eşitliğini sağlayan z sayılarının geometrik yerinin denklemi nedir?

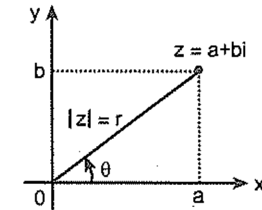
3. $z = x + yi$ olmak üzere,

$|z + 5 + 3i| = |3 - 4i|$

eşitliğini sağlayan z sayılarının geometrik yerinin denklemi nedir?

Karmaşık Sayının Kutupsal Gösterimi

Standart biçimi $z = a + bi$ olan z sayısını karmaşık düzlemde gösterelim.



z sayısının mutlak değeri $|z| = r$ ve x ekseninin pozitif yönü ile yaptığı açı (**Esas argümenti**) θ olsun.

θ : esas argüment, $\tan\theta = \frac{b}{a}$ dır.

Esas argüment, Arg(z) = θ biçiminde ifade edilir.

$\cos\theta = \frac{a}{r}$ ise $a = r.\cos\theta$

$\sin\theta = \frac{b}{r}$ ise $b = r.\sin\theta$ olarak bulunur.

Bu değerler $z = a + bi$ eşitliğinde yerlerine yazıldığında $z = r.\cos\theta + i.r.\sin\theta$ eşitliği elde edilmiş. Ve daha sonra bu ifade düzenlenerek elde edilen **$z = |z|.(\cos\theta + i\sin\theta)$** eşitliğine karmaşık sayının **kutupsal biçimi** demişler. Bunun **$z = |z|\,\text{cis}\theta$** olarak yazıldığı da olur. Şaşırmayın bu da ne diye? **Demek ki bir karmaşık sayıyı kutupsal biçimde yazabilmeniz için size iki şey lâzım. Birincisi $|z|$, ikincisi de θ açısı.**

$|z|$ yi nasıl bulcanızı biliyorsunuz. Ben θ yı nasıl bulcanızı söyleyeyim.

θ yı iki değişik yolla bulabilirsiniz.

Ya karmaşık düzlemde bu sayıyı gösterip mutlak değerini çizerek basit bir iki geometri bilgisi yardımıyla, ya da, $\tan\theta = \frac{b}{a}$ eşitliği yardımıyla karmaşık sayının bulunduğu bölgeyi de dikkate alarak.

Örnek soru

$z = -1 + \sqrt{3}i$

sayısının esas argümenti kaçtır?

Karmaşık sayının esas argümentini bulurken ilk önce tanθ nın kaç olduğuna bakmak lâzım.

$\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$ tür.

Ama tan değeri eksi olan açı ikinci bölgede olabileceği gibi dördüncü bölgede de olabilir.

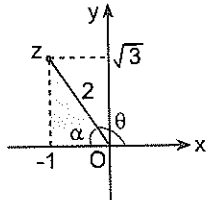
Lâkin (-, +) olan bölge ikinci bölge ve tan değeri $\sqrt{3}$ olan açı 60° dir. Bu ikisini birlikte düşünerek esas argümentin

180° - 60° = 120° olduğunu bulmak lâzım.

Ama bence çizerek bulmak daha kolay.

Çizerken ilk önce noktanın koordinatlarını yerleştirin ve mutlak değerini bularak üzerine yazın. Büyük bir ihtimalle açılarını bildiğiniz bir üçgen elde edeceksiniz.

Bu sorudaki şekil şöyle olmalı.



Bize lâzım olan θ açısının ölçüsü. Olsun θ yı hemencecik bulamasak bile α yı bulabiliriz. Öyle değil mi?☺

Üstteki taradığım üçgenin 30° - 60° - 90° üçgeni olduğunu görün isterseniz☺ Bu üçgende α = 60° ve dolayısıyla da θ = 120° dir.

Zaten biz de bunu arıyorduk☺

Şekil çizmenin bir faydası da en kötü ihtimalle bölgesini doğru tespit edersiniz. Biraz da özel açılı üçgen bilgisi oldu mu sıkıntı yok demektir☺

Şunu da söylemek lâzım.

Meselâ, z = 2i, z = – 3 gibi reel kısmı ya da sanal kısmı sıfır olanları kesinlikle çizmekte fayda var.

Bence tabii ki☺

Örnek Soru

$z = -1 + \sqrt{3}i$

sayısının kutupsal biçimi nedir?

Çözelim☺

Kutupsal yazım için iki şey lazımdı. Biri sayının mutlak değeri (|z|), diğeri de esas argümenti (θ)

Önce bunları bulun.

|z| = 2 ve θ = 120° değil mi?

Sonra da bu değerleri z = |z|.(cosθ + isinθ) de yerine yazın.

Artık z = 2.(cos120° + isin120°) olduğunu yazmış olmanız lâzım.

Kutupsal biçimde yazmak çok zor değil. Ama çok çok önemli. Ona göre.

Karmaşık Sayının Kutupsal koordinatları

z karmaşık sayısının mutlak değeri ve argümentinden oluşan (|z|, θ) sıralı ikilisine z nin **kutupsal koordinatları** denir. (r, θ) olarak da ifade edilebilir.

4. $z - 4 + i = 2 + 9i$

eşitliğini sağlayan z sayısının argümenti θ olduğuna göre, tanθ kaçtır?

5. $z = 1 + i$

karmaşık sayısının esas argümenti kaçtır?

6. $z = -1 + \sqrt{3}.i$

karmaşık sayısının esas argümenti kaçtır?

7. $z = -\sqrt{3} - i$

karmaşık sayısının esas argümenti kaçtır?

1. $z = \frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}i$

olduğuna göre, arg(z) kaçtır?

2. $z = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}i$

olduğuna göre, arg(z) kaçtır?

3. $z = \sqrt{2} + \sqrt{6}i$

karmaşık sayısının esas argümenti kaçtır?

4. $z = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

olduğuna göre, arg(z) kaçtır?

5. $z = 1 + i$

karmaşık sayısının kutupsal biçimi nedir?

6. $z = -1 + \sqrt{3}.i$

karmaşık sayısının kutupsal biçimi nedir?

7. $z = -\sqrt{3} - i$

karmaşık sayısının kutupsal biçimi nedir?

8. $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

karmaşık sayısının kutupsal biçimi nedir?

9. $z = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
karmaşık sayısının kutupsal biçimi nedir?

10. $z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$
karmaşık sayısının kutupsal biçimi nedir?

11. $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
karmaşık sayısının kutupsal biçimi nedir?

12. $z = i$
karmaşık sayısının kutupsal biçimi nedir?

13. $z = -4$
karmaşık sayısının kutupsal biçimi nedir?

14. $z = -3i$
karmaşık sayısının kutupsal biçimi nedir?

15. $z = -i$
karmaşık sayısının kutupsal biçimi nedir?

16. $z = 2 - 2\sqrt{3}i$
karmaşık sayısının kutupsal biçimi nedir?

1. Kutupsal biçimi,
$z = 6\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$
olan z karmaşık sayısının standart biçimi nedir?

2. Kutupsal biçimi,
$z = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$
olan z karmaşık sayısının standart biçimi nedir?

3. Kutupsal biçimi,
$z = \cos 60^\circ + i.\sin 60^\circ$
olan karmaşık sayının standart biçimi nedir?

4. Kutupsal biçimi,
$z = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$
olan karmaşık sayının standart biçimi nedir?

5. Kutupsal biçimi,
$z = \cos 300^\circ + i.\sin 300^\circ$
olan karmaşık sayının standart biçimi nedir?

6. Kutupsal biçimi,
$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$
olan karmaşık sayının standart biçimi nedir?

7. **Kutupsal koordinatları $\left(6, \frac{\pi}{3}\right)$ olan karmaşık sayının standart gösterimi nedir?**

8. **Kutupsal koordinatları, $\left(4, \frac{5\pi}{6}\right)$ olan karmaşık sayının standart gösterimi nedir?**

9. Kutupsal koordinatları,

$\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$

olan karmaşık sayının standart biçimi nedir?

10. Kutupsal koordinatları,

$\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

olan karmaşık sayının standart biçimi nedir?

11. Kutupsal koordinatları,

$\left(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}\right)$

olan karmaşık sayının standart biçimi nedir?

12. Kutupsal koordinatları,

$\left(1, \frac{7\pi}{6}\right)$

olan karmaşık sayının standart biçimi nedir?

Kutupsal Biçimde Çarpma ve Bölme

Ben bi örnek yapayım. Gerekli sonuçları siz çıkarırsınız☺

Örnek Soru

$z = 6\left(\cos 75^\circ + i\sin 75^\circ\right)$

$u = 3\left(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ\right)$

olduğuna göre, z.u ve $\frac{z}{u}$ nedir?

Çözelim.☺

Kutupsal biçimde verilen iki karmaşık sayı çarparken mutlak değerleri (parantez dışındaki sayılar) çarpın, açıları ise toplayın. Yani, bu durumda z ve u nun çarpımları

$z \cdot u = 6 \cdot 3\left(\cos(75^\circ + 15^\circ) + i\sin(75^\circ + 15^\circ)\right)$ ten

$z \cdot u = 18\left(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ\right) = 18i$ olur.

Bölerken ise mutlak değerlerini bölüp açıları çıkarın.

Bu da $\frac{z}{u} = \frac{6}{3}\left(\cos(75^\circ - 15^\circ) + i\sin(75^\circ - 15^\circ)\right)$

ten

$\frac{z}{u} = 2\left(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ\right) = 1 + \sqrt{3}i$ olur.

Demek ki kutupsal biçimde çarpma işlemi yapılırken, karmaşık sayıların mutlak değerleri çarpılıyor, açıları (argümentleri) ise toplanıyor.

Bölerken ise, mutlak değerleri bölünüyor, açıları (argümentleri) çıkarılıyor.

13. $u = 6(\cos 100^\circ + i\sin 100^\circ)$

$w = 6(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ)$

olduğuna göre, u.w çarpımının eşiti nedir?

14. $z = \frac{\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ}{\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ}$

sayısının standart biçimi nedir?

1. $z = \cos 16^\circ + i\sin 16^\circ$

$w = \cos 64^\circ + i\sin 64^\circ$

olduğuna göre, z.w karmaşık sayılarının çarpımı nedir?

2. $z = 2\left(\cos 94^\circ + i\sin 94^\circ\right)$

$w = 3\left(\cos 86^\circ + i\sin 86^\circ\right)$

olduğuna göre, z.w çarpımının standart biçimi nedir?

3. $z = \cos 111^\circ + i\sin 111^\circ$

$w = \cos 51^\circ + i\sin 51^\circ$

olduğuna göre, $\frac{z}{w}$ karmaşık sayısının standart biçimi nedir?

4. $z = 24\left(\cos 121^\circ + i\sin 121^\circ\right)$

$u = 4\left(\cos 61^\circ + i\sin 61^\circ\right)$

olduğuna göre, $\frac{z}{u}$ karmaşık sayısının standart biçimi nedir?

5. $z = \frac{\cos 75^\circ + i\sin 75^\circ}{\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ}$

sayısının standart biçimi nedir?

6. $z_1 = 4\text{cis}105^\circ$, $z_2 = 3\text{cis}35^\circ$, $z_3 = 6\text{cis}80^\circ$

olduğuna göre, $\frac{z_1 \cdot z_2}{z_3}$ neye eşittir?

Kutupsal Biçimde Üs Alma

Bazı karmaşık sayıların kutupsal biçimde üslerini almak normal üs almaktan daha kolaydır.

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ karmaşık sayısının n. kuvveti

$z^n = r^n \cdot \left(\cos(n \cdot \theta) + i\sin(n \cdot \theta)\right)$ şeklindedir.

Yani kutupsal biçimde üs alırken mutlak değerin üssünü alıyor, açıyı da üsle çarpıyoruz. Şunu da not edin bir yere. Kutupsal biçimde üs almak daha kolaydır.

Örnek Soru

$z = 1 - \sqrt{3}i$

olduğuna göre, z^9 un eşiti nedir?

Çözelim☺

Bu şekildeki sorularda ilk hareket karmaşık sayıyı kutupsal hale getirmek olmalı.

z karmaşık sayısının kutupsal biçimini

$z = 2.\text{cis}\frac{5\pi}{3}$ olarak bulduktan sonra üs alın.

$z^9 = 2^9.\text{cis}\left(9.\frac{5\pi}{3}\right) = 2^9\text{cis}15\pi = 2^9\text{cis}\pi$

Bunun da $z^9 = 2^9.(\cos\pi + i\sin\pi) = -2^9$ olduğunu bulmuş olmanız lâzım

7. $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{18}+i\sin\frac{\pi}{18}\right)$

olduğuna göre, z^6 nın eşiti nedir?

8. $z = \cos 6° + i\sin 6°$

olduğuna göre, z^{15} in değeri nedir?

9. $z = \cos 12° + i\sin 12°$

olduğuna göre, z^5 karmaşık sayısı nedir?

10. $z=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

olduğuna göre, z^{-4} ün eşiti nedir?

11. $z=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

olduğuna göre, z^{15} in eşiti nedir?

12. $z=\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$

olduğuna göre, z^5 in eşiti nedir?

13. $z = cis13°$

$w = cis64°$

olduğuna göre, $z^2 \cdot w$ işleminin sonucu nedir?

14. $z = cis75°$

$w = cis15°$

olduğuna göre, $\frac{z^3}{w^5}$ işleminin sonucu nedir?

1. $z = 12.cis\frac{5\pi}{7}$

$w = \sqrt{3}.cis\frac{\pi}{7}$

olduğuna göre, $\frac{z}{w^2}$ işleminin sonucu nedir?

2. $z = 4cis114°$

$w = 2.cis61°$

olduğuna göre, $\frac{z^2}{w^3}$ işleminin sonucu nedir?

3. $z=\dfrac{\cos\frac{\pi}{10}+i\sin\frac{\pi}{10}}{\cos\frac{\pi}{20}+i\sin\frac{\pi}{20}}$

olduğuna göre, z^{30} karmaşık sayısının standart biçimi nedir?

4. $z=2\left(\cos 40°+i\sin 40°\right)$

$u=\sqrt{3}\left(\cos 50°+i\sin 50°\right)$

$w=\sqrt{2}\left(\cos 25°+i\sin 25°\right)$

olduğuna göre, $\frac{z^3.u}{w^2}$ işleminin sonucu nedir?

Karmaşık Sayıyı Orijin etrafında döndürme

Karmaşık sayıyı döndürme olayını karmaşık sayıya karşılık gelen noktayı orijin etrafında döndürerek halledebilirsiniz. Çok da zor değildir aslında.
Ya da karmaşık sayıyı ilk önce kutupsal olarak ifade edin. Diyelim ki sayıyı $z = r.cis\theta$ olarak ifade etmiş olalım.
Bu sayının orijin etrafında pozitif yönde α kadar döndürülmesiyle elde karmaşık sayı

$\mathbf{z' = r.\,cis(\theta+\alpha)}$ dır.

Tercih sizin☺

5. $z=4\left(\cos 20°+i\sin 20°\right)$

karmaşık sayısına karşılık gelen noktanın orijin etrafında pozitif yönde 25° döndürülmesiyle elde edilen noktaya karşılık gelen karmaşık sayı nedir?

6. $z=6\left(\cos 160°+i\sin 160°\right)$

karmaşık sayısına karşılık gelen noktanın orijin etrafında negatif yönde 40° döndürülmesiyle elde edilen noktaya karşılık gelen karmaşık sayı nedir?

7. $z=\sqrt{3}+3i$

karmaşık sayısına karşılık gelen noktanın orijin etrafında pozitif yönde 120° döndürülmesiyle elde edilen noktaya karşılık gelen karmaşık sayı nedir?

8. $z = 2(\cos 70^\circ + i\sin 70^\circ)$

karmaşık sayısı orijin etrafında pozitif yönde 20° döndürülünce oluşan karmaşık sayı nedir?

9. $z = 6(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)$

karmaşık sayısı orijin etrafında negatif yönde 75°döndürülürse hangi karmaşık sayı elde edilir?

10. $z = -1 - 6i$

sayısının orijine göre uzaklığı değişmeksizin pozitif yönde 180° döndürülmesiyle oluşan karmaşık sayı nedir?

Bir Karmaşık Sayının Kökleri

z sayısının kareköklerini bulurken ilk önce z yi kutupsal olarak yazın. Sonra $\frac{1}{2}$. kuvvetini alın. Bulduğunuz sayı birinci köktür. Sonra açıya 180° ekleyin ve ikinci kökü de bulun.

Örnek Soru

$z^2 = 1 + \sqrt{3}i$

eşitliğini sağlayan z sayıları nedir?

Çözelim.☺

İlk hareket $1+\sqrt{3}i$ yi kutupsal olarak yazmak olmalı. $1+\sqrt{3}i$ nin kutupsal biçimini

$2(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$ olarak bulmuşsunuzdur.☺

Bu durumda

$z^2 = 2(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$ eşitliğindeki z değeri

$z = \left[2(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)\right]^{\frac{1}{2}}$ den

$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{60^\circ}{2} + i\sin\frac{60^\circ}{2}\right) = \sqrt{2}(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$

dir. Diğer bir değer ise 30° ye 180° ekleyerek bulacağınız $z_2 = \sqrt{2}(\cos 210^\circ + i\sin 210^\circ)$ dir.

İsterseniz bunları standart biçimde de yazabilirsiniz.

11. Karmaşık düzlemde verilen

$z = 4(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$

sayısının karekökleri nedir?

1. $z^2 = 9(\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ)$

eşitliğini sağlayan z sayıları nedir?

2. $z^2 = 9\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

eşitliğini sağlayan z sayıları nedir?

3. $z^2 = 4i$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

4. $z^2 - i = 0$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

5. $z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

eşitliğini sağlayan z karmaşık sayıları nedir?

6. $z^2 + i = 0$

eşitliğini sağlayan z sayıları arasındaki uzaklık kaçtır?

7. $z^2 + 9i = 0$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

8. $z = 2 + 2\sqrt{3}\,i$

karmaşık sayısının karekökleri arasındaki uzaklık kaçtır?

9. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$z^2 = 4i$

eşitliğini sağlayan z sayıları arasındaki uzaklık kaç birimdir?

Eğer karmaşık sayının küp köklerini bulacaksanız yine kutupsal biçimde ifade ettikten sonra $\frac{1}{3}$. kuvvetini alın. Sonra açıya 120° ekleyip ikinci kökü, bir 120° daha ekleyip üçüncü kökü bulun.

10. $z^3 = 8\left(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ\right)$

eşitliğini sağlayan z sayıları nedir?

11. $z^3 - 8i = 0$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

12. $z^3 = 4 - 4\sqrt{3}\,i$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

Logaritma

Çalışanlar, kötülük düşünmeye vakit bulamazlar.

Çalışmayanlar ise, kendilerini kötülükten kurtaramazlar.

Hz. Ali

LOGARİTMA

Zor bir konu değil. Ama logaritmayı adam gibi anlayabilmeniz için üslü ifadelerin temel özelliklerini iyi bilmeniz lâzım.
Tabii ki bilmeniz gereken başka bir kaç şey daha var. Fakat diyeceğim o ki burada vereceğim yeni bilgiler sizi zorlamayacak.
İlk önce logaritmanın ne işe yaradığını izah edeyim. Önce şu iki soruya cevap verin bakalım.

İlki şu $2^x = 4$ ise x kaçtır?

İkincisi ise $2^a = 5$ ise a kaçtır?

Biliyorum. x i 2 olarak buldunuz. Peki, a yı?
a yı eski bilgilerinizle bulmanız zor. İşte logaritmayı öğrendikten sonra a yı da bulabileceksiniz. En azından a şudur diyebileceksiniz☺

$a^x = b$ eşitliğinde $x = \log_a b$ olarak ifade edilmiş. Ve bu **x eşittir logaritma a tabanında b** diye okunur. "Bu da ne?" diye filan düşünmeyin. Ve burayı iyi anlayın. (Ki sonra yamulmayasınız☺)
İşin özeti bu konuda bilmeniz gereken ilk şey bu. Yani, $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$ olduğu.

Örneğin,

$2^x = 5$ eşitliğinde $x = \log_2 5$

$3^{x+1} = 2$ eşitliğinde $x + 1 = \log_3 2$

$10^{x-2} = 7$ eşitliğinde $x - 2 = \log_{10} 7$ dir.

Yani, üslü ifadedeki taban logaritmanın tabanı oluyor. Kısacası taban hep tabandır.☺
Bunun tersi de doğru tabii ki. Yani

$\log_3 x = 2$ ise $x = 3^2 = 9$ dur.

$\log_2 (x-1) = 5$ ise $x - 1 = 2^5$ tir.

Anlaşıldı mı bu kısım?

Örnek Soru

$\log_2 (3x-2) = 4$

olduğuna göre, x kaçtır?

Çözelim☺
Basit ama önemli bir soru.
Direkt tanımla ilgili.

$\log_2 (3x-2) = 4$ ise $3x - 2 = 2^4$ tür.

Buradan da x = 6 çıkıyor.

1. Aşağıdaki eşitlikleri sağlayan x değerlerini kaçtır?

a) $2^x = 3$

b) $3^x = 6$

c) $2^x = 8$

d) $7^x = 20$

2. Aşağıdaki eşitlikleri sağlayan x değerlerini kaçtır?

a) $\log_2 x = 3$

b) $\log_3 x = 4$

c) $\log_5 x = 0$

d) $\log_6 x = 1$

3. $3^{x-2} = 2$

olduğuna göre, x in eşiti nedir?

4. $5^x - 1 = 11$

olduğuna göre, x in eşiti nedir?

5. $2^{x-3} = 5$

olduğuna göre, x kaçtır?

6. $3^{a+2} - 5 = 0$

olduğuna göre, a kaçtır?

7. $5^{\frac{x}{2}} - 2 = 0$

olduğuna göre, x kaçtır?

8. $x + 1 = \log_2 4$

olduğuna göre, x kaçtır?

9. $\log_3 x = 2$

olduğuna göre, x kaçtır?

10. $\log_2(a-1) = 3$

olduğuna göre, a kaçtır?

11. $\log_3(a+2) = 2$

olduğuna göre, kaçtır?

12. $1 + \log_2 x = 3$

olduğuna göre, x kaçtır?

13. $\log_5 x - 2 = 0$

olduğuna göre, x kaçtır?

14. $\log_3(4-x) = 4$

olduğuna göre, x kaçtır?

1. $\log_2(x+1) = 2$

olduğuna göre, x kaçtır?

2. $\log_3(x-2) = 1$

olduğuna göre, x kaçtır?

3. $\log_3(2x+5) = 4$

olduğuna göre, x kaçtır?

4. $\log_2\left(8 \cdot 2^{x+7}\right) = 5x + 2$

olduğuna göre, x kaçtır?

5. $\log_2\left(x^2 + x + 4\right) = 4$

olduğuna göre, x in alabileceği değerler toplamı kaçtır?

Peş peşe iki veya daha çok logaritma olursa en dıştakinden başlayın.

Örnek Soru

$\log_2(\log_3(\log_5(x-2))) = 0$

olduğuna göre, x kaçtır?

Çözelim☺

$\log_2(...) = 0$ imiş. Demek ki parantez içinde yazmadığım yer $(...) = 2^0 = 1$ e eşitmiş☺

Aynı mantıkla devam edin. Şimdi soru şöyle oldu.

$\log_3(\log_5(x-2)) = 1$ ise x kaçtır?

Bu daha basit.☺

$\log_3(...) = 1$ ise $(...) = 3^1 = 3$ olacak.

Gerisi de aynı zaten. $\log_5(x-2) = 3$ ise $x - 2 = 5^3$ ten x = 127 bulursunuz artık☺

6. $\log_2(\log_3 x) = 1$

olduğuna göre, x kaçtır?

7. $\log_2(\log_5(4x-1))=0$

olduğuna göre, x kaçtır?

8. $\log_{\frac{1}{2}}(\log_3(5x+1))=-2$

olduğuna göre, x kaçtır?

9. $\log_3(1+\log_4(7x+2))=1$

olduğuna göre, x kaçtır?

10. $\log_2(3-\log_3(x-1))=2$

olduğuna göre, x kaçtır?

11. $\log_2(\log_3(\log_5(10x+5)))=0$

olduğuna göre, x kaçtır?

12. $\log_3(8+\log_5(\log_2(5x+2)))=2$

olduğuna göre, x kaçtır?

13. $\log_6(5+\log_4(2+\log_3(5x-1)))=1$

olduğuna göre, x kaçtır?

14. $\log_7(\log_3(\log_2(5x-2)))=0$

olduğuna göre, x kaçtır?

Aklınızda olsun. Logaritmanın tabanı yazılmamış ise tabanı 10 kabul edilir. Daha doğrusu taban 10 ise çoğu zaman yazılmaz.

Yani, $\log_{10}x=\log x$ tir.

Dolayısıyla $\log 2=\log_{10}2$, $\log 5=\log_{10}5$ ve $\log(2x-1)=\log_{10}(2x-1)$ demektir.

Bir de doğal logaritma denen bi logaritma var. Bu da tabanı e olan logaritmadır. (e = 2,71828... e eşit irrasyonel bir sayıdır. Nereden çıktığını boş verin☺ $\log_e x=\ln x$ demektir.

Dolayısıyla $\ln 2=\log_e 2$, $\ln(x-2)=\log_e(x-2)$ demektir.

1. $\log(5x+10)=2$

olduğuna göre, x kaçtır?

2. $\log(6+\log_2(4x+8))=1$

olduğuna göre, x kaçtır?

3. $\ln(x+1)=2$

olduğuna göre, x kaçtır?

4. $\log_2(3+\ln(x-1))=2$

olduğuna göre, x kaçtır?

5. $\ln(e^2+\log_3(x-1))=2$

olduğuna göre, x kaçtır?

6. $\log x=a$

$\log y=b$

olmak üzere, x.y = 100 olduğuna göre, a + b toplamı kaçtır?

7. $x=\log 100$

$y=\log_x 8$

olduğuna göre, x.y çarpımı kaçtır?

Logaritma Fonksiyonunun Özellikleri

İlk şunları söyleyeyim. Bunlar özellik filan değil zaten. Daha önce anlattığım şeyler.

$a^1 = a$ olduğundan $\log_a a = 1$ dir. (Yalnız a nın 1 olmaması lâzım.)

Yani, 1 den farklı her pozitif sayının aynı tabandaki logaritması 1 dir.

$\log_3 3 = \log_5 5 = \log 10 = \ln e = \ldots = 1$

Tanımdan çıkarabileceğiniz diğer bir sonuç da

$a^0 = 1$ olduğundan $\log_a 1 = 0$ dır.

Bunun yanisi de şu; taban ne olursa olsun 1 in logaritması sıfırdır.

$\log_3 1 = \log 1 = \ln 1 = \log_7 1 = \ldots = 0$

8. $\log_2 1 + \log_3 3$

işleminin sonucu kaçtır?

9. $\log_4 4 + \log_5 1$

işleminin sonucu kaçtır?

10. $\log_{2012} 2012 + \log_{61} 61$

işleminin sonucu kaçtır?

11. $\log 10 + \ln 1$

işleminin sonucu kaçtır?

12. $\dfrac{2\log 10 + \ln e + \log_5 1}{\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} + \log_4 1}$

işleminin sonucu kaçtır?

Belki de en önemli özellik şu

Pozitif x reel sayısı için, $\log_a x^m = m \cdot \log_a x$ dir.

Sayının üssü kat sayı olarak başa geliyor.

Eğer tabandaki sayının da üssü varsa bu da başa bölüm olarak gelir. $\log_{a^n} x^m = \frac{m}{n} \cdot \log_a x$ e eşittir.

Antrenman yapa yapa pekiştirin bakalım bunları.☺
Başka bi yolu da yok zaten.

13. Aşağıdaki ifadelerin değeri kaçtır?

a) $\log_2 8$ b) $\log_5 25$

c) $\log_3 81$ d) $\log_7 49$

Bazen üslü ve köklü ifade bilgisine ihtiyacınız olabilir.

Hatırlayın. $\frac{1}{2} = 2^{-1}$, $\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}$ idi. Yine

$\sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{5} = \sqrt[2]{5^1} = 5^{\frac{1}{2}}$ idi.

Hatırladınız mı?

14. Aşağıdaki ifadelerin değeri kaçtır?

a) $\log_{\frac{1}{2}} 4$ b) $\log_{\sqrt{5}} 5$

c) $\log_{\frac{1}{4}} 32$ d) $\log_{\sqrt{5}} 25$

e) $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt{2}$ f) $\log_{\sqrt[3]{2}} 4$

1. $\log_2 4 + \ln e$

toplamının sonucu kaçtır?

2. $\log_2 8 + \log_5 125$

toplamının sonucu kaçtır?

3. $\log_4 16 + \log_6 36$

toplamının sonucu kaçtır?

4. $\log 100 \cdot \log 1000$

çarpımının sonucu kaçtır?

5. $6\left(\log\sqrt{10} + \log\sqrt[3]{10}\right)$

işleminin sonucu kaçtır?

6. $\ln\left(\sqrt{e}\right) + \ln\left(\sqrt[3]{e}\right)$

işleminin sonucu kaçtır?

7. $\log_4 8 + \log_9 27 - \log_{25} 5$

işleminin sonucu kaçtır?

8. $\log(0{,}01) + \log\sqrt{10}$

işleminin sonucu kaçtır?

9. $\log_{\sqrt{2}} 4 - \log_{\sqrt{3}} 27 + \log_{\sqrt[3]{3}} 3$

işleminin sonucu kaçtır?

10. $\log_{\frac{1}{2}} 8 \cdot \log_{\frac{1}{9}} 81 + \log_{\sqrt[4]{5}} 25$

işleminin sonucu kaçtır?

11. $\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{9}{4}\right)+\log_{\frac{1}{e}}\left(e^{2}\right)-\ln\left(\frac{1}{e^{2}}\right)$

işleminin sonucu kaçtır?

12. $\log\left(\sqrt[4]{1000}\right)+\log_{5\sqrt{5}}(625)$

işleminin sonucu kaçtır?

13. $\ln\sqrt[5]{e^{3}}+\ln\sqrt[5]{e^{2}}$

işleminin sonucu kaçtır?

14. $\log\frac{1}{10}+\log\frac{1}{100}+\log\frac{1}{1000}$

toplamının sonucu kaçtır?

15. $\log 10^{-11}+\log 10^{-10}-\log\sqrt[3]{10^{-123}}$

işleminin sonucu kaçtır?

16. $a=b^{3}$

olduğuna göre, $\log_{a} b$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

17. $x=y^{2}$

olduğuna göre, $\log_{x} y^{3}$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

18. $x=y^{4}$

olduğuna göre, $\log_{x^{3}} y^{2}$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

19. $a^{2}=b^{3}$

olduğuna göre, $\log_{a^{2}} b$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

20. $a^{\frac{1}{2}}=b$

olduğuna göre, $\log_{a} b^{2}$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

1. $\log_{2} 3=a$

olduğuna göre, $\log_{4} 9$ **un a türünden değeri nedir?**

2. $\log_{3} 5=x$

olduğuna göre, $\log_{9} 125$ **in x türünden değeri nedir?**

3. $\log_{a} b=12$

olduğuna göre, $\log_{a^{2}} b^{3}$ **ün değeri kaçtır?**

4. $\log_{a} b=18$

olduğuna göre, $\log_{\sqrt{a}} b$ **nin değeri kaçtır?**

Logaritma çarpımı toplama, bölümü de farka dönüştürür.

$\log_{a}(x.y)=\log_{a} x+\log_{a} y$

Bunun Türkçe meali şu☺
Pozitif iki sayının çarpımının logaritması, bu sayıların logaritmalarının toplamına eşittir.

$\log_{a}\left(\frac{x}{y}\right)=\log_{a} x-\log_{a} y$

Bunun Türkçe meali de şu☺
Pozitif iki sayının bölümünün logaritması bu sayıların logaritmalarının farkına eşittir.

5. $\log_{3} x=m$

olduğuna göre, $\log_{x} 9x$ **in m türünden değeri nedir?**

6. $\log_{15} 5+\log_{15} 3$

toplamının sonucu kaçtır?

7. $\log_{105} 5+\log_{105} 3+\log_{105} 7$

toplamının sonucu kaçtır?

8. $\log_{2e} 2 + \log_{2e} e$

toplamının sonucu kaçtır?

9. $\log_3 A + \log_3 B = 1$

olduğuna göre, A.B çarpımı kaçtır?

10 $\log_2 A - \log_2 B = 3$

olduğuna göre, $\frac{A}{B}$ oranı kaçtır?

11. $\log_{\frac{5}{3}} 5 - \log_{\frac{5}{3}} 3$

farkı kaça eşittir?

12. $\log_{0,5} 4 - \log_{0,5} 8$

işleminin sonucu kaçtır?

13. $\log_3 5 - \log_3 2 + \log_3\left(\frac{2}{5}\right)$

işleminin sonucu kaçtır?

14. $\log_3\left(\frac{3}{5}\right)+\log_3\left(\frac{5}{7}\right)+\log_3\left(\frac{7}{9}\right)$

işleminin sonucu kaçtır?

15. $\log_2\left(\frac{3}{2}\right)+\log_2\left(\frac{4}{3}\right)+\log_2\left(\frac{5}{4}\right)+....+\log_2\left(\frac{16}{15}\right)$

işleminin sonucu kaçtır?

1. $\dfrac{\log_6 18+\log_6 12}{\log_2 24-\log_2 6}$

işleminin sonucu kaçtır?

2. $\log 2 = a$

$\log 3 = b$

olduğuna göre, log18 in a ve b türünden eşiti nedir?

3. $\log 5 = a$

$\log 3 = b$

olduğuna göre, log225 in a ve b türünden eşiti nedir?

4. $\log 2 = x$

$\log 3 = y$

olduğuna göre, log72 nin x ve y türünden değeri nedir?

5. $\log 3 = x$

$\log 2 = y$

olduğuna göre, log108 in x ve y türünden eşiti nedir?

6. $\log 2 = x$

$\log 3 = y$

olduğuna göre, log0,6 nın x ve y türünden eşiti nedir?

7. $\log 2 = 0,301$

$\log 3 = 0,477$

olduğuna göre, log720 nin değeri kaçtır?

8. $\log 2 \cong 0,301$

$\log 3 \cong 0,477$

olduğuna göre, log0,12 nin yaklaşık değeri kaçtır?

9. $\log 2 \cong 0{,}301$

$\log 3 \cong 0{,}477$

olduğuna göre, $\log(24.10^{-6})$ **nın yaklaşık değeri kaçtır?**

10. $\log 3 = y$

$\log 5 = z$

olduğuna göre, $\log(0{,}06)$ **nın y ve z türünden eşiti nedir?**

11. $\log_2 x = 5$

$\log_2 y = 3$

olduğuna göre, $\log_2(x^3y^2)$ **kaçtır?**

12. $\log x = 4$

$\log y = 3$

olduğuna göre, $\log(x^2\sqrt{y})$ **kaçtır?**

13. $\log_3 x = 5$

$\log_3 y = 2$

olduğuna göre, $\log_3\left(\frac{x^5}{y^2}\right)$ **kaçtır?**

14. $\ln(xy) = 3$

$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = 1$

olduğuna göre, x in değeri nedir?

15. $2\log_{12} 2 + \log_{12} 3$

işleminin sonucu kaçtır?

16. $4\log_{15}\sqrt{3} + 6\log_{15}\sqrt[3]{5}$

işleminin sonucu kaçtır?

Taban Değiştirme

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Logaritmada tabanı değiştirmek zor değil. Ama "Ne zorumuz var ki tabanı değiştiriyoruz?" diye gelebilir aklınıza. Şeytandandır bu düşünce☺ Takılmayın öyle şeylere.

Taban değiştirirken asıl önemli olan husus tabanın hangi tabana göre değiştirileceğidir. Bunu soruda verilenler bakıp anlayabilirsiniz aslında.

Örneğin,

$\log_2 3$ ifadesinde taban değiştirirken

$$\log_2 3 = \frac{\log_5 3}{\log_5 2} = \frac{\log_7 3}{\log_7 2} = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{\ln 3}{\ln 2} = \ldots$$ yazılabilir.

Gerçi ben bir sürü yazdım. Ama hangi taban işinize yarayacaksa o tabanı seçin.
Anlaşıldı mı bu olay?
Neyin işinize yarayacağını da siz bilin artık.☺

Örnek Soru

$\log_3 2 = a$

$\log_3 7 = b$

olduğuna göre, $\log_{12} 42$ **nin a ve b türünden değeri nedir?**

Çözelim☺
Klasik bi taban değiştirme sorusu. Verilenlere bakınca tabanı 3 seçmek gerektiğini görebilmek lâzım. Çünkü 3 tabanındaki 2 ve 7 yi biliyoruz en azından☺ 3 tabanına göre tabanı değiştirirseniz,

$\log_{12} 42 = \frac{\log_3 42}{\log_3 12}$ olarak yazılabilir. Bunda bi sakınca yok☺

Sonraki adım bildiğiniz gibi☺

$\frac{\log_3 42}{\log_3 12} = \frac{\log_3(2.3.7)}{\log_3(2^2.3)}$ olarak yazıp devam edin.

Devam edince $\frac{\log_3 2 + \log_3 3 + \log_3 7}{\log_3 2^2 + \log_3 3} = \frac{a+b+1}{2a+1}$

gibi bir sonuç bulacaksınız.
Oldu mu şimdi?

Özet olarak

Demek ki verilenin tabanı ile istenenin tabanı farklı ise istenen ifadede verilen tabanda taban değiştirmek lâzım.

1. $\log_2 5 = a$

$\log_2 3 = b$

olduğuna göre, $\log_3 25$ **in a ve b türünden değeri nedir?**

2. $\log 2 = x$

$\log 3 = y$

olduğuna göre, $\log_2 3$ **ün x ve y türünden eşiti nedir?**

3. $\log_2 3 = u$

$\log_2 5 = v$

olduğuna göre, $\log_3 5$ **ün u ve v türünden eşiti nedir?**

4. $\log 2 = x$

$\log 3 = y$

olduğuna göre, $\log_9 6$ **nın x ve y türünden eşiti nedir?**

5. $\log_2 5 = a$

$\log_2 3 = b$

olduğuna göre, $\log_6 15$ **in a ve b türünden değeri nedir?**

6. $\log_3 5 = u$

olduğuna göre, $\log_{15} 45$ **ifadesinin u türünden eşiti nedir?**

7. $\log_3 5 = a$

olduğuna göre, $\log_{15} 3$ **ifadesinin a türünden eşiti nedir?**

8. $\log 2 = x$

olduğuna göre, $\log_{20} 2$ **ifadesinin x türünden eşiti nedir?**

9. $\log_2 5 = x$

$\log_5 3 = y$

olduğuna göre, $\log_2 3$ **ün x ve y türünden eşiti nedir?**

10. $\log_5 4 = a$

$\log_4 7 = b$

olduğuna göre, $\log_{25} 7$ **ün a ve b türünden eşiti nedir?**

11. $\log_3 2 = a$

$\log_3 5 = b$

olduğuna göre, log40 ın a ve b türünden değeri nedir?

12. $\log_2 7 = a$

$\log_2 3 = b$

olduğuna göre, $\log_{14} 21$ **in a ve b türünden değeri nedir?**

Yine taban değiştirmeyi kullanarak $\frac{1}{\log_b a} = \log_a b$ olduğunu görebilirsiniz☺

1. $\frac{1}{\log_3 21} + \frac{1}{\log_7 21}$

işleminin sonucu kaçtır?

2. $\log_6 3 + \frac{1}{\log_2 6}$

işleminin sonucu kaçtır?

3. $\frac{3}{\log_2 24} + \log_{24} 3$

işleminin sonucu kaçtır?

4. $\frac{2}{\log_2 20} + \frac{1}{\log_5 20}$

işleminin sonucu kaçtır?

5. $\frac{1}{\log_{120} 24} - \frac{1}{\log_5 24}$

işleminin sonucu kaçtır?

6. $\frac{6}{\log_{\sqrt[3]{2}} 12} + \frac{2}{\log_{\sqrt{3}} 12}$

işleminin sonucu kaçtır?

7. $\frac{1}{\log_3 42} + \frac{1}{\log_7 42} + \frac{1}{\log_2 42}$

işleminin sonucu kaçtır?

8. $\frac{2}{\log_3 360} + \frac{3}{\log_2 360} + \frac{1}{\log_5 360}$

işleminin sonucu kaçtır?

9. $\frac{4}{\log_2 60}+\frac{4}{\log_{\sqrt{3}} 60}+\frac{6}{\log_{\sqrt[3]{5}} 60}$

işleminin sonucu kaçtır?

Yine $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d = \log_a d$ olduğu rahatlıkla görülebilir☺

10. $\log_2 3 . \log_3 2$

işleminin sonucu kaçtır?

11. $\log_2 9 . \log_3 8$

işleminin sonucu kaçtır?

12. $\log_3 4 . \log_{27} 2$

işleminin sonucu kaçtır?

13. $\log 25 . \log_5 1000$

işleminin sonucu kaçtır?

14. $\log_{25} 9 . \log_4 5 . \log_{27} 16$

işleminin sonucu kaçtır?

15. $\log_2 3 . \log_3 4 . \log_4 5 \ldots . \log_{63} 64$

işleminin sonucu kaçtır?

16. $\log_2 9 \cdot \log_{\sqrt{3}} 125 \cdot \log_5 8$

işleminin sonucu kaçtır?

Logaritma Fonksiyonunun Tanım Kümesi

Önce Türkçesini söyleyeyim.

Sadece pozitif sayıların logaritması vardır. Negatif sayıların ve sıfırın logaritması yoktur.
Ayrıca logaritmanın tabanı da pozitif olmalı. Ama 1 olamaz. Bunu da aklınızda tutun☺
Gelelim bunun matematikçesine☺

$y = \log_a g(x)$ fonksiyonunun tanımlı olması için $g(x) > 0$ olmalı. Ayrıca $a > 0$ ve $a \neq 1$ olmalı.

Örnek Soru

$f(x) = \log_{(x-1)}(7-x)$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesi nedir?

Çözelim☺

Çok basit.

Logaritmanın tanımlı olması için gördüğünüz bütün x li ifadeler pozitif (yani sıfırdan büyük☺) olmalı. Sadece taban 1 olamaz.

Buna dikkat edin.

İlk önce $7 - x > 0$ dan $x < 7$ yi bulun.

Sonra tabana geçin. Ve $x - 1 > 0$ dan $x > 1$ olması gerektiğini görün. Ama neyi unutmayın demiştim. Bir de $x - 1 \neq 1$ olması gerektiğini. Yani, $x \neq 2$ olmalı.

Daha bitmedi tabii ki. Şimdi ne oldu. x 1 den büyük, 7 den küçük olacak. Ama 2 de olmayacak.

Bunu $(1, 7) - \{2\}$ olarak ifade etmek lâzım.

Ben tabanı x li olan bir fonksiyon verdim. Ama çoğu zaman tabanı x li verilmez. Göreceksiniz☺

1. $f(x) = \log_2(x-2)$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesi nedir?

2. $f(x) = \log_3(5-x)$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesi nedir?

3. $f(x) = \log_5\left(\frac{2x-12}{3}\right)$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesi nedir?

4. $f(x) = 2 - \log_3(5-x)$

fonksiyonunu tanımlı yapan pozitif x tam sayılarının toplamı kaçtır?

5. $f(x) = \log(x-2) + \log(6-x)$

fonksiyonunu tanımlı yapan x tamsayılarının toplamı kaçtır?

6. $f(x) = \log_7\left(\frac{x-2}{6-x}\right)$

fonksiyonunun en geniş tanım aralığı nedir?

7. $f(x)=\ln\left(-x^2+2x+15\right)$

fonksiyonunun en geniş tanım aralığı nedir?

8. $f(x)=\log_6\left(9-x^2\right)$

fonksiyonu x in kaç farklı tamsayı değeri için tanımlıdır?

9. $f(x)=\log_x(7-x)$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesi nedir?

10. $f(x)=\log_{(x-2)}(7-x)$

fonksiyonunu tanımlı yapan tam sayıların toplamı kaçtır?

Logaritmalı ve Üslü Fonksiyonların Tersi

Hatırlayacaksınız.☺

Bir fonksiyonun tersini alırken önce x i yalnız bırakıyordunuz. (Yani, x in y türünden değerini buluyordunuz.) buradaki olay da aynı.

Zaten birazdan göreceksiniz ki üslü biçimde verilen fonksiyonun tersi logaritmalı, logaritmalı verilen fonksiyonun tersi de üslü çıkıyor.

Çok fazla bir zorluğu yok. Eğer cebirsel yeteneklerinizi kaybetmediyseniz bunu da yapabilmeniz lazım.☺

Örnek Soru

$f(x)=\log_2(5x-3)$

fonksiyonunun ters fonksiyonu olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

Çözelim.☺

Fonksiyonun tersi sorulduğunda ilk önce x i yalnız bırakın. f(x) yerine y yazın ve devam ederek,

$y=\log_2(x-3)$ eşitliğinden en baştaki logaritma tanımını kullanarak $\log_2(5x-3)=y$ den $5x-3=2^y$

ve $x=\frac{2^y+3}{5}$ i bulun.

Sonrasını biliyorsunuz☺ Bunu $f^{-1}(x)=\frac{2^x+3}{5}$ olarak yazın ve ters fonksiyonu bulmuş olun.

Örnek Soru

$f(x)=3^{x-2}-1$

fonksiyonunun ters fonksiyonu olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

Çözelim.☺

Yine aynı şeyi yapın. Yani, x i yalnız bırakın. f(x) yerine y yazın ve devam ederek,

$3^{x-2}-1=y$ eşitliğinden yine logaritmanın en başında verdiğim logaritma tanımını kullanarak

$3^{x-2}=y+1$ ve $x-2=\log_3(y+1)$ ve buradan da

$x=2+\log_3(x+1)$ ü bulun.

Sonrası hep aynı.☺ Bunu $f^{-1}(x)=2+\log_3(x+1)$

olarak yazın ve ters fonksiyonu bulmuş olun.

Var mı bi zorluğu?☺

1. $f(x)=\log_6 x$

fonksiyonunun ters fonksiyonu olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

2. $f(x)=2+\log_3 x$

fonksiyonunun ters fonksiyonu olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

3. $f(x)=\log_5(x-2)$

fonksiyonunun ters fonksiyonu olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

4. $f(x)=\log_3(2x+1)$

fonksiyonunun ters fonksiyonu olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

5. $f(x)=\log_6(4x-3)$

fonksiyonunun ters fonksiyonu olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

6. $f(x)=\log_3\left(\frac{x+2}{4}\right)$

fonksiyonunun ters fonksiyonu olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

7. $f(x)=\ln\left(\frac{x-4}{3}\right)$

fonksiyonunun ters fonksiyonu olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

8. $f(x)=-3+\log_5(x-2)$

fonksiyonunun ters fonksiyonu olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

9. $f(x)=\frac{1}{3}\log_2(x-4)$

fonksiyonunun ters fonksiyonu olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

10. $f(x)=\frac{1}{2}\log(x+2)$

fonksiyonunun ters fonksiyonu olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

11. $f(x)=3^x$

fonksiyonunun ters fonksiyonu olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

12. $f(x)=5\cdot 2^x$

fonksiyonunun ters fonksiyonu olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

13. $f(x)=2^{x-3}$

fonksiyonunun ters fonksiyonu olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

14. $f(x)=5^{x+1}$

fonksiyonunun ters fonksiyonu olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

15. $f(x)=2^x-3$

fonksiyonunun ters fonksiyonu olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

16. $f(x)=2^{3x}-1$

fonksiyonunun ters fonksiyonu olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu nedir?

Logaritmik Fonksiyonun Grafiği

Grafik çizme konusunda çok da istekli olmadığınızı biliyorum☺ Ama korkmanıza da gerek yok☺ Logaritmik fonksiyonların grafiğini çizmek de, çizilen grafiğin hangi fonksiyona ait olduğunu bulmak da zor değil kesinlikle. Yeter ki dediklerimi iyi anlayın.

İlk önce tanım aralığını bulun. Sonra da y = 0 ve y = 1 olan noktaların apsislerini bulun.

Bu kadarcık işte.☺

Ama bu noktalardan geçen grafiği çizmek için de epey bir yetenekli olmak lazım. O da sizde çokça olduğuna göre.☺

Örnek Soru

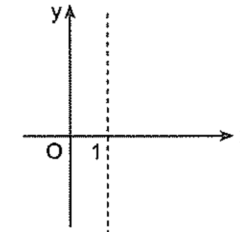
$y = \log_3(x-1)$

fonksiyonun grafiğini çizelim.

Çözelim☺

Logaritmalı fonksiyon grafiğinde önemli olan tanım kümesi ve y yi 0 ve 1 yapan x değerleriydi.

Bu fonksiyon $x-1>0$ için yani, $x>1$ için tanımlıdır. (Grafikte x = 1 den kesikli bir çizgi çizilir ve grafik x > 1 olduğundan 1 in sağ tarafında olacak demektir bu.)



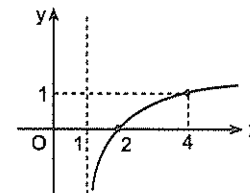
İkincisi olarak da y yi 0 ve 1 yapan x değerlerini bulmak lâzım.

Bulalım. $\log_3(x-1)=0$ dan x = 2 oluyor. Demek ki grafik (2,0) dan geçecek.

$\log_3(x-1)=1$ den x = 4 oluyor. Bu da grafiğin (4,1) noktasından geçeceği anlamına geliyor.

y, 1, (4,1), O, 1, (2,0), 4, x

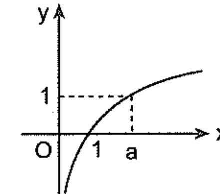
Bu adımlardan sonra iş grafiği çizmeye geldi. Aklınızda olsun. **Logaritmalı fonksiyonun grafiği yay şeklinde olur.** Bu noktalardan geçen ve kesikli çizginin diğer tarafına geçmeyen eğri de şu olacak.



Grafiği uzun uzun çizdim. Ama test sorularında grafiği çizmeyeceksiniz tabii ki. Tanım aralığına ve geçtiği noktalara bakarak doğru cevabı bulacaksınız. Hatırlayacaksınız.☺

Grafiğin geçtiği noktaların koordinatları fonksiyon denklemini sağlardı.

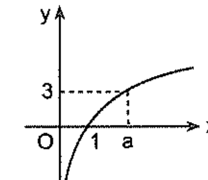
1.



Şekilde $y=\log_2 x$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, a kaçtır?

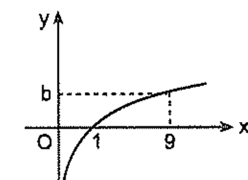
2.



Şekilde $y=\log_2 x$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, a kaçtır?

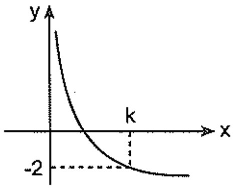
3.



Şekilde $y=\log_3 x$ eğrisinin grafiği verilmiştir.

Buna göre, b kaçtır?

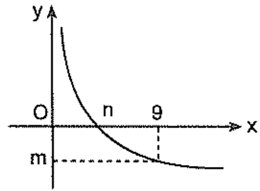
4.



Şekilde $y = \log_{\frac{2}{3}} x$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, k kaçtır?

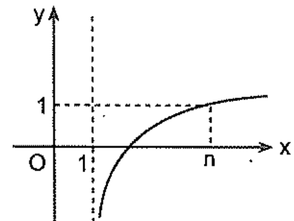
5.



Şekilde $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, m + n toplamı kaçtır?

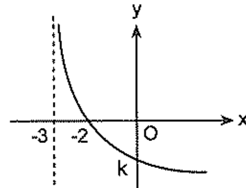
6.



Şekilde $f(x) = \log_4(2x - m)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, m + n toplamı kaçtır?

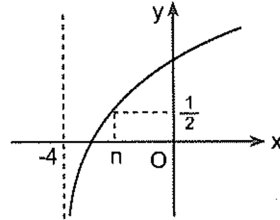
7.



Şekilde $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x + n)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, k + n toplamı kaçtır?

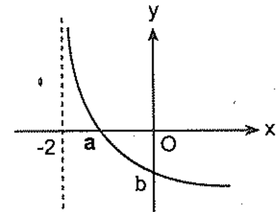
8.



Şekilde $f(x) = \log_4(x + m)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, m + n toplamı kaçtır?

9.



Şekilde $y = \log_{\frac{1}{4}}(x + 2)$ eğrisinin grafiği verilmiştir.

Buna göre, a + b toplamı kaçtır?

Bir Reel Sayının Logaritmasının Yaklaşık Değeri

Zor bir şey değil. Burada yaklaşık değerden kasıt verilen sayının logaritmasının hangi iki ardışık tam sayı arasında olduğunu bulmaktır.

Bunun için tabandaki sayının tam kuvvetlerine eşit olan sayıların logaritmasından yararlancaz.

Şöyle ki log1 = 0 ve log10 = 1 olduğuna göre, 10 tabanına göre 1 ile 10 arasındaki (yani, tam kısmı bir basamaklı) sayıların logaritmasının 0 ile 1 arasında olduğunu söyleyebiliriz.

Meselâ log7 = 0,... yine log8,4 = 0,...gibi bir şeydir. Aynı mantıkla log10 = 1 ve log100 = 2 olduğundan 10 ile 100 arasındaki (yani, tam kısmı iki basamaklı) sayıların logaritmasının 1 ile 2 arasında olduğunu ve yine aynı mantıkla log100 = 2 ve log1000 = 3 olduğundan 100 ile 1000 arasındaki (yani tam kısmı üç basamaklı) sayıların logaritmasının da 2 ile 3 arasında olduğunu kolaylıkla söyleyebilirsiniz.

Bu arada bu mantığı taban 10 dan farklı olduğunda da kullanabilirsiniz.

Meselâ

$\log_5 5 = 1$ ve $\log_5 25 = 2$ olduğundan 5 ile 25 arasındaki sayıların 5 tabanındaki logaritması 1 ile 2 arasında olduğunu görebilirsiniz.

Var mı anlaşılmayan bir şey?☺

Ya da anlaşılan bir şey?☺

1. **log461 hangi iki ardışık tam sayı arasındadır?**

2. **log35,8 hangi iki ardışık tamsayı arasındadır?**

3. **log9,356 hangi iki ardışık tam sayı arasındadır?**

4. log0,000256

sayısı hangi iki ardışık tam sayı arasındadır?

5. **$\log_3 45$ hangi iki ardışık tam sayı arasındadır?**

6. **$\log_2 70$ hangi iki ardışık tamsayı arasındadır?**

7. **$\log_5 111$ hangi iki ardışık tam sayı arasındadır?**

8. **$\log_7 2$ hangi iki ardışık tamsayı arasındadır?**

9. $\log 2 \cong 0{,}301$

olduğuna göre, log80 in yaklaşık değeri kaçtır?

10. $\log 2 \cong 0{,}301$

olduğuna göre, log 0,064ün yaklaşık değeri kaçtır?

11. $\log 2 \cong 0{,}301$
$\log 3 \cong 0{,}477$

olduğuna göre, log18 in yaklaşık değeri kaçtır?

12. $\log 2 \cong 0{,}301$
$\log 3 \cong 0{,}477$

olduğuna göre, log120 nin yaklaşık değeri kaçtır?

13. $\log 3 \cong 0{,}477$

olduğuna göre, log0,0027 nin yaklaşık değeri kaçtır?

14. $a = \log_2 10$
$b = \log_5 24$
$c = \log_3 15$

olduğuna göre, a, b, c nin küçükten büyüğe doğru sıralaması nedir?

15. $x = \log_3 5$
$y = \log 175$
$z = \log_2 122$

olduğuna göre, x, y, z nin küçükten büyüğe doğru sıralaması nedir?

16. $x = \log_3 200$
$y = \log_2 40$
$z = \log_4 150$

olduğuna göre, x, y, z arasındaki sıralama nasıldır?

17. $a = \log_{\frac{1}{2}} 20$
$b = \log_{\frac{1}{3}} 30$
$c = \log_{\frac{1}{4}} 60$

olduğuna göre, a, b, c nin küçükten büyüğe doğru sıralaması nedir?

Basamak Sayısını Bulma

Çok uzatmadan bunu şöyle ifade edeyim.

Üslü olarak verilen bir sayının basamak sayısını bulmak için o sayının 10 tabanındaki logaritmasına bakılır.

Basamak sayısı, sayının logaritmasının tam kısmından bir fazladır.

Örnek Soru

$\log 2 \cong 0{,}301$

olduğuna göre, 40^{20} **sayısı kaç basamaklıdır?**

Çözelim☺

Hesap makinesiyle bulamazsınız. Aslında 40 üzeri 20 nin kaç olduğunu bulmak zor. Ama kaç basamaklı olduğunu bulabiliriz yine de. Bunun için şunu yapın. Bu sayının 10 tabanındaki logaritmasının kaç olduğunu bulun. Doğru bulduysanız şu işlemleri yapmış olmanız lâzım☺

$\log 40^{20} = 20\log 40 = 20\log\left(2^2.10\right)$

$20(2\log 2 + \log 10) = 20(2 \cdot 0{,}301 + 1) = 32{,}04$

Bu sayının tam kısmı 32 imiş. Tam kısmını bulduysanız basamak sayısı bunun 1 fazlasıdır. Yani, 40^{20} sayısı 33 basamaklıdır.

Demek ki hesap makinesine gerek yokmuş.☺

1. $\log 2 \cong 0{,}301$

olduğuna göre 2^{50} **kaç basamaklı sayıdır?**

2. $\log 2 \cong 0{,}301$

olduğuna göre, 8^{10} **sayısı kaç basamaklıdır?**

3. $\log 2 \cong 0{,}301$

olduğuna göre, 20^{50} **sayısı kaç basamaklıdır?**

4. $\log 3 \cong 0{,}477$

olduğuna göre, 9^{20} **sayısı kaç basamaklıdır?**

5. $\log 3 \cong 0{,}477$

olduğuna göre, 9^{30} **kaç basamaklıdır?**

6. $\log 3 \cong 0{,}477$

olduğuna göre, 30^{50} **kaç basamaklıdır?**

Logaritmik ve Üslü Denklemler

Burada yeni bir şey yok. Üslü denklemler bildiğiniz gibi☺Logaritmalı denklemlerde ise logaritma özelliklerini biliyorsanız sıkıntı yaşamayacaksınız.
Bu arada logaritmalı denklemden kasıt, logaritmalı ifade içeren denklemlerdir.
Üslü denklemlerde özel bir şey yok. Ama logaritmalı denklemleri çözerken bir şeye dikkat etmek lâzım. Yoksa yamulma olasılığı mevcut.☺
O da şu; logaritmalı denklemi çözdükten sonra bulduğunuz x değerlerinin logaritmalı ifadelerin hiç birini negatif yapmadığından emin olun. Negatif yapıyorsa bu değer kök olamaz.

Örnek Soru

$2^{x^2+x} = 64$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

Çözelim☺
En önemli üslü denklem tipi bu.
Yani tabanları eşit duruma getirilebilenler. Biliyorsunuz ki☺**Tabanları eşit iki üslü ifade eşit ise üsleri de eşittir.**

$2^{x^2+x} = 2^6$ olduğundan $x^2 + x = 6$ dır. bu denklemi çözüp $x = 2$ ve $x = -3$ ü bulursunuz artık.
Ç.K = { 2, − 3 } imiş.☺

Örnek Soru

$4^x - 2^{x+2} - 32 = 0$

denklemini sağlayan x değeri kaçtır?

Çözelim☺
Denklem üslü. Ama aslında ikinci derece denkleme dönüştürülerek çözülen tiplerden☺
Denklemi düzenleyin $(2^x)^2 - 4 \cdot 2^x - 32 = 0$ şeklinde ifade edin. Sonra da $2^x = t$ diyerek
$t^2 - 4t - 32 = 0$ denkleminden $t = 8$ ve $t = -4$ ü bulun. Ama sorulanın x in değerleri olduğunu kesinlikle aklınızdan çıkarmayın.
Onun için t değerlerini $2^x = t$ de yerine yazarak
$2^x = 8$ den $x = 3$ ü bulun. Ve $2^x = -4$ eşitliğini sağlayan x değeri olmadığını da görün☺
Demek ki x = 3 imiş☺

7. $4^{2x-1} = 64$
olduğuna göre, x kaçtır?

8. $2^{x+2} + 2^x = 40$
denklemini sağlayan x değeri kaçtır?

9. $4^x - 4^{x+1} + 9 = 0$
olduğuna göre, x kaçtır?

10. $4^{a-1} = 3$
olduğuna göre, a kaçtır?

11. $3^{x+1} + 3^x - 8 = 0$
olduğuna göre, x kaçtır?

1. $4^x - 2^{x+1} - 8 = 0$
olduğuna göre x kaçtır?

2. $5^{x-1} + 5^x = 1$
olduğuna göre, x kaçtır?

3. $10^x + 10^{x-1} = 22$
olduğuna göre x kaçtır?

4. $e^x + 1 = 2$
denkleminin çözüm kümesi nedir?

5. $2^{2x} - 2^{x+1} - 48 = 0$
denkleminin çözüm kümesi nedir?

6. $3^{2x} + 3 \cdot 3^x - 28 = 0$
denkleminin çözüm kümesi nedir?

7. $5^{2x} - 3 \cdot 5^x - 10 = 0$
denkleminin çözüm kümesi nedir?

8. $9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 8 = 0$
denkleminin kökler toplamı nedir?

$\log_3(2x-5)=2$ gibi bir denklemi çözerken sıkıntınız olacağını sanmıyorum.

9. $\log_2\left(x^2-2x\right)=3$

olduğuna göre, x değerleri toplamı kaçtır?

10. $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x+1}{8}\right)=2$

olduğuna göre, x kaçtır?

11. $\log_{\sqrt{2}}(x-5)=4$

olduğuna göre, x kaçtır?

12. $\log_a\left(a^2+2a-8\right)=2$

olduğuna göre, denklemin çözüm kümesi nedir?

13. $\log_x\left(x^2-4x+1\right)=2$

olduğuna göre, x kaçtır?

14. $\log_2\left(\log_3(x-1)\right)=1$

olduğuna göre, x kaçtır?

15. $\log_{\frac{1}{3}}\left(1+\log_5(x-2)\right)=0$

olduğuna göre, x kaçtır?

16. $\log_{\sqrt{3}}\left(\log_3\left(\log_2(x+2)\right)\right)=0$

olduğuna göre, x kaçtır?

Fakat $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ gibi bir denklemi çözerken x değerlerini $f(x)=g(x)$ eşliğinden bulun. Bulun fakat bulduğunuz değerlerin hem f(x) i hem de g(x) i pozitif yaptığından emin olun. Yani kontrol edin bi zahmet☺

Örnek Soru

$\log(3x+2)+\log x=0$

denklemini sağlayan x değeri kaçtır?

Çözelim☺

İlk önce bildiğiniz logaritma özelliklerini kullanın ve denklemi $\log(3x+2)+\log x=\log(3x+2).x=0$ biçimine getirin.

Sonra da $\log\left(3x^2+2x\right)=0$ denklemini çözün.

$3x^2+2x=10^0=1$ den $x=\frac{1}{3}$ ve $x=-1$ i bulun.

Fakat $x=-1$ için logaritmalı ifadelerin negatif olduğunu görün. Dolayısıyla x sadece $\frac{1}{3}$ olabilir.

1. $\log_3(5x+1)=\log_3 21$

olduğuna göre, x kaçtır?

2. $\log_2(3x-4)=\log_2 14$

olduğuna göre, x kaçtır?

3. $\log_5 3x=\log_5(2x+10)$

olduğuna göre, x kaçtır?

4. $\frac{6\log_2 x}{\log_2 4}=\log_2\frac{81}{x}$

olduğuna göre, x kaçtır?

5. $\log_2(x+1)=\log_2(2x-4)$

olduğuna göre, x kaçtır?

6. $\log_3(2x+1)-\log_3(3x-6)=0$

olduğuna göre, x kaçtır?

7. $\log_4(a+17)-\log_4(4a+5)=0$

olduğuna göre, a kaçtır?

8. $\log_2(x+1)+\log_2(3x-1)=5$

olduğuna göre, x kaçtır?

9. $\log_5(x^4-3x)=\log_5(x^4+x-16)$

olduğuna göre, x kaçtır?

10. $\log_5(x-1)=\log_5(x^2+x-5)$

olduğuna göre, x kaçtır?

11. $\log_5 x+\log_5 2=1$

olduğuna göre, x kaçtır?

12. $\log_2(x-2)+\log_2 3=2$

olduğuna göre, x kaçtır?

13. $\log_3(x+1)-\log_3(x+3)=1$

olduğuna göre çözüm kümesi nedir?

14. $\log_2(x+1)+\log_2(x-2)=2$

olduğuna göre, x kaçtır?

1. $\log(4x+3)+\log x=0$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

2. $\log(x-2)+3\log\frac{1}{x}=1-3\log x$

olduğuna göre, x kaçtır?

3. $\log_3(x^2+3)-\log_3(x+1)=1$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

Logaritmalı eşitsizlikler

Logaritmalı eşitsizlikleri çözerken aklınızda hep şu olsun. Negatif sayıların logaritması yoktur. Yani, logaritmanın içi negatif olamaz.

Bir de tabanın 0 ile 1 arasında mı yoksa 1 den büyük mü olduğu önemli. Hem de çok☺

Ben şunları yazayım. Bakalım bir sonuç çıkarabilecek misiniz? ☺

Taban 1 den büyükse sıkıntı yok.

$\log_3(2x-1)>2$ ise $2x-1>3^2$ dir.

$\log_2(3x-1)\geq 3$ ise $3x-1\geq 2^3$ tür.

Fakat

$\log_3(2x-1)<2$ ise $0<2x-1<3^2$ dir.

$\log_2(3x-1)\leq 3$ ise $0<3x-1\leq 2^3$ tür.

Eşitsizlikleri çözmedim. Sadece yol gösterdim. Çözersiniz artık☺

Yani, x li ifade bir sayıdan büyükse eşitsizliği düz çözün.☺ Ama x li ifade bir sayıdan küçükse x li ifadenin soluna 0 <... yazın. (ki logaritma tanımlı olsun.)

Taban 0 ile 1 arasında olursa eşitsizlik yön değiştiriyor.

$\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)<2$ ise $2x-1>\left(\frac{1}{2}\right)^2$ dir.

$\log_{\frac{1}{2}}(3x-1)\leq 3$ ise $3x-1\geq\left(\frac{1}{2}\right)^3$ tür.

Fakat

$\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)>2$ ise $0<2x-1<\left(\frac{1}{2}\right)^2$ dir.

$\log_{\frac{1}{2}}(3x-1)\geq 3$ ise $0<3x-1\leq\left(\frac{1}{2}\right)^3$ tür.

Bunları da çözersiniz☺

Üstte ben tabanı $\frac{1}{2}$ verdim. Ama 0 ile 1 arasında başka bir sayı da olabilir tabii ki☺

Üstte fark etmişsinizdir. Yine x li ifade bir sayıdan büyükse eşitsizlik düz çözülüyor.☺ Ama x li ifade bir sayıdan küçükse x li ifadenin soluna 0 <... yazılıyor. Mantık yine aynı aslında.

4. $\log_2(x-2)>1$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

5. $\log_4(3x-2) \geq 2$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

6. $\log_3(x-2) + \log_3 2 \geq 1$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

7. $\log_2(2x-1) + \log_2 3 \geq 2$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

8. $\log_5(3x-4) < 1$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

9. $\log_5(x-4) \leq 2$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

10. $\log_2(x-1) + \log_2 3 < 1$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

11. $\log_3(3x-1) + \log_3 2 \leq 2$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

12. $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) \leq 2$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

1. $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1) \geq 1$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

2. $\log_2 3 + \log_2(x-2) < 1$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

3. $\log_2(x+1) - \log_2 3 \leq 2$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

4. $\log_2(2x+3) - \log_2 3 \leq 1$

eşitsizliğini sağlayan en büyük tam sayı kaçtır?

5. $\log_4 2 + \log_4(x-5) < 2$

eşitsizliği x in kaç tam sayı değeri için doğrudur?

6. $\log_3 2 + \log_3(x-2) > 2$

eşitsizliğini sağlayan en küçük tam sayı kaçtır?

$\log_5(2x-1) < \log_5(x+6)$ gibi bir eşitsizliği çözerken de aynı şeyi yapacaksınız.
Yani, $0 < 2x-1 < x+6$ deyip çözeceksiniz.
$\log_5(2x-1) > \log_5(x+6)$ şeklindekileri çözerken ise $2x-1 > x+6 > 0$ deyip öyle çözeceksiniz.
Bunları çözebilirsiniz diye tahmin ediyorum.☺ Ama unutanlar için hatırlatayım.
İlkinde önce $0 < 2x-1$ eşitsizliğini.
Sonra da $2x-1 < x+6$ eşitsizliğini çözüp ikisinin kesişimlerini alıyorduk☺ Diğerinde de aynı mantık.

7. $\log_2(x-3) < \log_2(2x+6)$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

8. $\log_2(x-3) < \log_2(x+1)$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

9. $\log_2(3x-3) < \log_2(2x+6)$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

10. $\log_3(3x+11) > \log_3(4x-2)$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

11. $\log_4(x+6) \leq \log_4(4x-15)$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

$1 \leq \log_3(2x-7) < 2$ gibi eşitsizliklerin çözümü en kolayı.
Yapmanız gereken $3^1 \leq 2x-7 < 3^2$ deyip devam etmek. Başka da bir şey yok.

12. $1 < \log_2 x \leq 3$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

13. $0 \leq \log_3(2x-1) < 2$

eşitsizliğini sağlayan x tam sayılarının toplamı kaçtır?

14. $-2 \leq \log_2(x-1) \leq 3$

eşitsizliği x in kaç farklı tam sayı değeri için doğrudur?

15. $\log_5(x-3) + \log_5(x+3) \leq \log_5 7$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

Permütasyon Kombinasyon Binom Açılımı Olasılık

Başkalarının kusurlarını tartarken, parmağıyla terazinin kefelerini bastırmayan insan pek enderdir.

Byron Langenfeld

Faktöriyel (!) meselesi

n pozitif tam sayı olmak üzere, 1 den n ye kadar olan sayma sayılarının çarpımına **n faktöriyel** denir. Ve **n!** biçiminde gösterilir.

n! = 1.2.3.4...n

1! = 1

2! = 1.2

3! = 1.2.3

5! = 1.2.3.4.5

Bir de özel olarak **0! = 1** olduğunu bilmek lâzım.

1. 4! + 3!

toplamının sonucu kaçtır?

2. $\frac{5!}{3!}+\frac{4!}{0!}$

işleminin sonucu kaçtır?

3. 10! + 9! = x.9!

olduğuna göre, x kaçtır?

4. 6! + 7! + 8! = x.6!

olduğuna göre, x kaçtır?

5. $\frac{10!}{7!\cdot 3!}$

işleminin sonucu kaçtır?

6. $\frac{4!\cdot 10!}{3!\cdot 9!}$

işleminin sonucu kaçtır?

7. $\frac{8!}{3!\cdot 5!}$

işleminin sonucu kaçtır?

8. $\frac{10!}{0!\cdot 8!}$

işleminin sonucu kaçtır?

9. $\frac{8!+7!}{8!-7!}$

işleminin sonucu kaçtır?

10. $\frac{n!}{(n-2)!}$

ifadesinin en sade biçimi nedir?

11. $\frac{(n+1)!}{(n+1)(n-1)!}$

ifadesinin en sade biçimi nedir?

12. $\frac{n!}{(n-1)!} = 9$

olduğuna göre, n kaçtır?

13. $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30$

olduğuna göre, n kaçtır?

14. $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 72$

olduğuna göre, n kaçtır?

15. $\frac{a!}{3!} = 4$

olduğuna göre, a kaçtır?

16. $\frac{n!}{4!} = 30$

olduğuna göre, n kaçtır?

17. $\frac{a!}{b!} = 5$

olduğuna göre, a kaçtır?

18. $\frac{a!}{b!} = 6$

olduğuna göre, a nın alabileceği değerler toplamı kaçtır?

19. $\frac{a!}{b!} = 20$

olduğuna göre, a kaç farklı değer alabilir?

Toplama Yoluyla Sayma

Bunu geçiyorum. Acayip derecede basit. Zaten bunu biliyorsunuzdur da bildiğinizden haberiniz yoktur muhtemelen☺
Ama şunun üzerinde duralım.☺

Çarpma Yoluyla Sayma Yöntemi

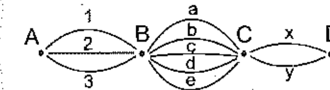
Oturup uzun uzun saymaktan üşenen tiplerin bulduğu bir yöntem bu. Yıllar sonra ben de dâhil oldum onlara.☺
Ama "Ben uzun uzun sayarım. Acayip yetenekliyim sayma konusunda" diyenlerdenseniz keyfiniz bilir.☺Neyse...
Bu sayma yönteminin mantığını şu örnek soruyla izah edeyim.

Örnek Soru

A dan B ye 3 farklı yolla, B den C ye 5 farklı yolla, C den D ye 2 farklı yolla gidilebiliyor.

Buna göre, A dan yola çıkan bir kişi B ve C den geçmek koşuluyla D ye kaç farklı yolla gidebilir?

Çözelim.☺
Zor değil. Ama olayın mantığını anlayabilmek için önemli bir soru. Bu soruda neden çarpma yapıldığını anlamaya çalışın.
Önce basit bi şekil yapalım☺



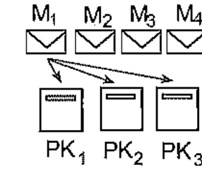
A dan B ye gidilen yollara 1, 2 ve 3 diyelim.
B den C ye ise a, b, c, d ve e.
C den D ye de x ve y diyelim.
Sadece A dan B ye 3 farklı yolla gidilebiliyor.
Eğer A dan C ye gidilseydi 3.5 = 15 farklı yolla (1a, 1b, 1c, 1d, 1e, 2a, 2b, ..., 3e) gidilebilirdi. Yani A dan B ye gidilebilen her bir yol seçeneği için B den C ye 5 farklı seçenek söz konusu. Onun için 3 tane 5 in toplamı yani 3.5 = 15 farklı yol olabiliyor.
A dan yola çıkıp B ve C ye de uğrayıp D ye gidecekseniz o zaman C ye kadar gelebildiğiniz her bir yol seçeneği için 2 seçim yapabilirsiniz.
Dolayısıyla 15 tane 2 = 30 olduğundan 30 farklı yolla gidilebilir.
Kısacası A dan D ye 3.5.2 = 30 farklı yolla gidilebilir.
Aslında olayın özeti şu:

Bir işin gerçekleşmesi için peş peşe bir sürü iş☺ yapmanız gerekiyorsa bu iş her bir işin olası sayılarının çarpımıyla bulunur.

Örnek Soru

4 farklı mektup 3 farklı posta kutusuna kaç farklı şekilde atılabilir?

Çözelim☺
Dikkat edin. Her bir mektubun posta kutusuna atılması bir iştir aslında. Ama en nihayetinde hepsi atılacak.
Küçük bi şekil çizeyim de ne yapılacağını görün.



Diyelim ki birinci mektubu elinize aldınız. Ve bunu posta kutusuna atacaksınız. Kaç farklı seçim şansınız var?
3 değil mi?
İkinci mektup için?
Onun için de 3 olası tercihiniz var. Öyle değil mi?
Sadece iki mektup olsaydı bu mektupları posta kutularına toplam 3.3 = 9 farklı şekilde atabilirdiniz.
Anladığınız üzre her bir mektup için 3 farklı tercih söz konusu olacağından bu 4 mektup bu 3 posta kutusuna 3.3.3.3 = 81 farklı şekilde atılabilir.

Örnek Soru

A = { 0, 1, 2, 3, 4, 5}

kümesinin elemanlarıyla rakamları farklı üç basamaklı kaç çift sayı yazılabilir?

Çözelim☺
Basit gibi duruyor. Ama sıkıntılı bir soru aslında☹
Önce basamak sayısı kadar kutucuk çizin.



Ve bu türdeki yani, "... ... **kaç sayı yazılabilir?" biçimindeki soruları çözerken her bir basamağı tek tek ele alın. Ve o basamağa yazılabilecek olası rakamları düşünün.**
Yalnız rakamlar arasında sıfır varsa dikkatli olun.
Çünkü sıfır başa (en sola) gelemez.
Sayının çift olması için son rakamı 0, 2 veya **4** (bu kümeye göre) olabilir. Ama sıfır başa gelemezdi. Onun için bi sonda sıfır varken bi de yokken diye düşünmek lâzım.

0̸		0 2 4

Ve daha da önemlisi hangi basamaktan başlayacağınız. Onu da söyleyeyim.

İlk önce koşul olan basamaklara gelebilecek olası rakamları yazın. Eğer çakışan rakamlar yoksa sıkıntı yok. Ama çakışan rakamlar varsa çakışanlar için ayrı, çakışmayanlar için ayrı kutucuklar çizin. Bu arada kutucuklara rakamların kendilerini değil kaç tane olası rakam gelebileceğini yazacaksınız. Bunu da unutmayın.☺

Sıfır çakıştığı için (Sonda olacak, başta olmayacak. İki koşul var.) bi en sonda sıfır varken bir de yokken diye düşünün.

İlk önce çift olma şartını sağlayın.

Son rakam 2 veya 4 ten biri olursa (İki rakam olabiliyor. Kutucuğa 2 yazın.) rakamlardan biri yazılmış olacak. Geriye kalıyor beş rakam.

0, 1, (2 ya da 4), 3 ve 5.

Peki, bu 5 rakamın hepsi başa gelebilir mi şimdi? Sıfır dışındakiler için evet. Ama sıfır gelemez. Dolayısıyla dört rakam gelebilir. (Kutucuğa 4 yazın.) Baş ve sona gelebilecek rakamların sayısını yazdıktan sonra sıra geldi ortaya.

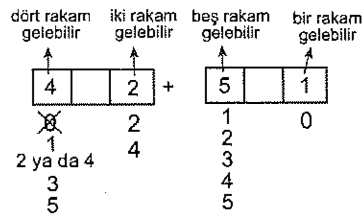
Şimdi kendinize şu soruyu sorun. Kaç rakam kaldı? Ve hepsini kullanabilir misiniz?

Dört rakam daha var yazabileceğiniz. Ve bu kutucuk için hepsini kullanabilirsiniz. (Kutucuğa 4 yazın)

Gelelim sıfırın sonda olması durumuna.

Sıfır sonda olursa en başa sıfır gelme problemi olmayacağından en başa yani ilk kutuya diğer bütün rakamlar (5 tane) gelebilir. Ortaya da kalan dört rakam.

Üstte anlattığım şeyin özeti şu.



Ortayı da yazınca şöyle oluyor.

4	4	2	+	5	4	1	= 52

Demek ki 0, 1, 2, 3, 4, 5 rakamlarıyla rakamları farklı üç basamaklı 52 tane sayı yazılabiliyormuş.

"Bu kadar uğraşmaktansa oturup hepsini yazsaydık daha kısa sürerdi." diye düşünebilirsiniz.

Ama bu anlatırken uzun oluyor sadece. Yoksa ben bu soruyu 2 saniye de çözüyorum☺

Sizi de yetiştireceğim. Üzülmeyin☺

1. **3 çeşit çorap ve 2 çeşit kravat içinden 1 çorap ve bir kravat kaç farklı şekilde seçilebilir?**

2. **Bir kişi 5 farklı renkteki gömlek ve 6 farklı renkteki pantolondan birer tanesini kaç farklı şekilde giyebilir?**

3. **4 bay ve 5 bayan arasından 1 bay ve 1 bayan kaç farklı şekilde seçilebilir?**

4. **3 doktor 5 hemşire arasından 1 doktor ve 1 hemşire kaç farklı şekilde seçilebilir?**

5. **7 kişinin katıldığı bir yarışmada birinci, ikinci ve üçüncünün sıralanışı kaç farklı şekilde gerçekleşebilir?**

1. Ahmet in 9, Yeşim in 6 farklı kitabı vardır.
   Buna göre, sadece birer kitabı kaç farklı şekilde değiş tokuş edebilirler?

2. **Lokantaya giren bir müşteri 3 ana yemek, 5 tatlı, 4 salata ve 6 çorba çeşidinin her birinden birer tanesini kaç farklı şekilde seçebilir?**

3. Farklı elemanlardan oluşan A ve B kümelerinin eleman sayıları sırasıyla 4 ve 2 dir.
   Buna göre, birinci bileşeni A, ikinci bileşeni B kümesinden alınarak kaç farklı sıralı ikili yazılabilir?

4. 3 çeşit çorba, 4 çeşit yemek ve 2 çeşit tatlı arasından her çeşitten birer tane alarak menü oluşturulmak isteniyor.
   Buna göre, kaç farklı menü oluşturulur?

5. A dan B ye 4 yol, B den C ye 3 yol vardır.
   A dan hareket eden bir araç B den geçmek koşuluyla C ye kaç farklı şekilde gidebilir?

6. A dan B ye 4 yol, B den C ye 3 yol vardır.
   A dan hareket eden bir araç giderken ve dönerken B den geçmek koşuluyla C ye kaç farklı şekilde gidip dönülebilir?

7. A dan B ye 4, B den C ye 3 farklı yol ve A dan direkt C ye 2 farklı yol vardır.
   Buna göre, A dan hareket eden bir araç C ye kaç farklı şekilde gidebilir?

8. A dan B ye 3 yol, B den C ye 5 yol ve A dan direkt C ye 4 yol vardır.
   Buna göre, A dan hareket eden bir araç C ye kaç farklı şekilde gidebilir?

9. Bir doğru yanlış testinde 10 soru vardır.
Bu testin doğru cevap anahtarı kaç farklı şekil de hazırlanabilir?

10. 5 soruluk bir test sınavında her sorunun 4 cevap seçeneği vardır.

Buna göre, bu sınavın doğru cevap anahtarı kaç farklı şekilde hazırlanabilir?

11. **4 farklı mektup 3 farklı posta kutusuna kaç farklı şekilde atılabilir?**

12. **3 farklı mektup 5 farklı posta kutusuna kaç farklı şekilde atılabilir?**

A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 } kümesine göre, aşağıdaki soruları cevaplayınız.
A kümesinin elemanlarıyla üç basamaklı,

13. **Kaç farklı sayı yazılabilir?**

14. **Kaç çift sayı yazılabilir?**

15. **Kaç tek sayı yazılabilir?**

16. **5 ile bölünebilen kaç sayı yazılabilir?**

17. **300 den büyük kaç sayı yazılabilir?**

18. **600 den küçük kaç sayı yazılabilir?**

19. **300 den büyük kaç çift sayı yazılabilir?**

A = { 0, 1, 2, 3, 4, 5 } kümesine göre, aşağıdaki soruları cevaplayınız.

A kümesinin elemanlarıyla üç basamaklı

1. **Kaç farklı sayı yazılabilir?**

2. **Kaç çift sayı yazılabilir?**

3. **Kaç tek sayı yazılabilir?**

4. **5 ile bölünebilen kaç sayı yazılabilir?**

5. **300 den büyük kaç sayı yazılabilir?**

6. **400 den küçük kaç sayı yazılabilir?**

7. **420 den büyük kaç sayı yazılabilir?**

8. **300 den büyük kaç çift sayı yazılabilir?**

- **Sayı sorularında rakamların farklı olup olmadığına da dikkat edin.**

A = {1, 2, 3, 4, 5, 6 } kümesine göre, aşağıdaki soruları cevaplayınız.

A kümesinin elemanlarıyla <u>üç basamaklı, rakamları farklı,</u>

9. **Kaç farklı sayı yazılabilir?**

10. **Kaç çift sayı yazılabilir?**

11. **Kaç tek sayı yazılabilir?**

12. **5 ile bölünebilen kaç sayı yazılabilir?**

13. **300 den büyük kaç sayı yazılabilir?**

14. **400 den küçük kaç sayı yazılabilir?**

15. **300 den büyük kaç çift sayı yazılabilir?**

A = { 0, 1, 2, 3, 4, 5 } kümesine göre, aşağıdaki soruları cevaplayınız.

A kümesinin elemanlarıyla <u>üç basamaklı, rakamları farklı,</u>

16. Kaç farklı sayı yazılabilir?

17. Kaç çift sayı yazılabilir?

18. Kaç tek sayı yazılabilir?

19. 5 ile bölünebilen kaç sayı yazılabilir?

20. 300 den büyük kaç sayı yazılabilir?

21. 500 den küçük kaç çift sayı yazılabilir?

22. 420 den büyük kaç sayı yazılabilir?

23. 300 den büyük kaç tek sayı yazılabilir?

24. A = { 1, 2, 3, 4, 5 }

kümesinin elemanları kullanılarak en az iki basamağı aynı olan üç basamaklı kaç farklı doğal sayı yazılabilir?

25. A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }

kümesinin elemanlarıyla onlar basamağı 3 ten küçük, üç basamaklı, rakamları farklı kaç doğal sayı yazılabilir?

26. B = { 0, 1, 2, 3, 4, 5 }

kümesinin elemanları ile 3000 ile 5000 arasında, rakamları farklı kaç tek sayı yazılabilir?

27. A = { 1, 2, 3, 5 }

kümesinin elemanlarıyla yazılabilen rakamları farklı, üç basamaklı çift sayıların toplamı kaçtır?

28. A = {1, 2, 3, 4, 5 }

kümesinin elemanlarıyla yazılabilen üç basamaklı rakamları farklı sayıların kaçında 1 ve 2 yan yanadır?

Permütasyon

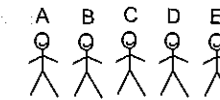
Bu konulara karşı önyargıları olan çok. Ama kesinlikle zorlanacağınız bir konu değil. Olayın mantığını anlamaya çalışın. Gerisi kolay.

Permütasyon, elemanları veya nesneleri sıralama işidir. Her bir farklı sıralanış farklı bir permütasyondur. Onun için permütasyonda elemanların veya nesnelerin yerleri ve sıralamaya tabi tutulan eleman sayısı önemlidir.

Şu iki örnekle olayı kavrayacağınızdan eminim.

Birincisi şu:

"5 kişiden üçü yan yana sıralı üç sandalyeye kaç farklı şekilde oturabilirler?" bunu bulalım.



1. yer 2. yer 3. yer

Sıralama (yani, permütasyon) sorularında ilk önce kaç kişilik yer olduğuna bakın. Sonra her bir yeri tek tek ele alın. Ve oraya kaç farklı elemanın gelebileceğini düşünün. Meselâ üstte, birinci yere 5 kişiden biri gelebilir. Buraya 5 yazın.☺

Şimdi 1 kişiyi yerleştirdiniz. Geriye kaldı 4 kişi ve 2 yer. Bu yerlerden ikincisi için 4 elemandan biri gelebilir. Buraya da 4 yazın.

Şimdi kaldı 3 kişi ve 1 yer. Buraya 3 kişiden biri gelebilir. Buraya da 3 yazın. Ve şimdi bu yazdıklarınızı çarpın. 5.4.3 = 60 olduğundan bu 5 kişiden üçü 3 sandalyeye 60 farklı şekilde oturabilirler.

Önceki anlattıklarımdan farkı yok gördüğünüz gibi.

İkincisi de şu:

"4 farklı renkteki ampul yan yana kaç farklı şekilde dizilebilir?" bunu bulalım.

Uzun uzun anlatmıycam.☺

Dört yer ve dört eleman var. Birinci yer için 4, ikinci yer için 3, üçüncü yer için 2 ve son yer için 1 olası durum olduğundan toplam 4.3.2.1 = 4! = 24 farklı şekilde dizilebilirler.

Aynı mantıkla 5 kişi yan yana 5! = 120 farklı şekilde, 6 kişi 6! farklı şekilde, 7 kişi 7! farklı şekilde sıralanabilirler.

Aslında şöyle bir genelleme yapabilirsiniz☺

n tane farklı nesnenin yan yana farklı dizilişlerinin sayısı P(n,n) = n! dir.

1. 6 arkadaş yan yana kaç farklı şekilde sıralanabilirler?

2. 5 farklı matematik kitabı bir rafa yan yana kaç farklı şekilde sıralanabilirler?

3. 11 kişiden oluşan bir futbol takımı bir sıra halinde sahaya çıkacaktır.

Kaç farklı şekilde çıkabilirler?

4. Farklı renklerde aynı büyüklükteki 4 farklı küp üst üste kaç farklı şekilde dizilebilir?

5. BİZE, HER, YER, TRABZON

kelimelerinin yerleri değiştirilerek dört kelimeden oluşan kaç farklı cümle kurulabilir?

6. 1967 sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek 4 basamaklı kaç farklı sayı yazılabilir?

7. SUAT kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek anlamlı ya da anlamsız dört harfli kaç kelime yazılabilir?

8. AHMET kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek anlamlı ya da anlamsız beş harfli kaç kelime yazılabilir?

9. MEHTAP kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek anlamlı ya da anlamsız altı harfli kaç kelime yazılabilir?

Eğer elemanlardan bir kısmı sıralanacaksa bunu çarpma yoluyla sayma diye en başta anlattığım yöntemle yapabilirsiniz. Ama şunu da bilmek lâzım☺

n tane elemandan r tanesinin farklı dizilişlerinin sayısı P(n,r) biçiminde gösterilir.

Ve $P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$ ile hesaplanır.

Meselâ 6 elemandan üçü yan yana

$P(6,3)=\frac{6!}{(6-3)!}=\frac{6!}{3!}=6\cdot5\cdot4$ farklı şekilde sıralanabilir.

Ama şu olayı pekiştirin bi☺

$P(5,2)=\frac{5!}{(5-2)!}=\frac{5!}{3!}=\frac{5.4.\cancel{3!}}{\cancel{3!}}=5.4$

$P(8,3)=\frac{8!}{5!}=8.7.6$

$P(6,3)=6.5.4$

$P(4,1)=4$

$P(n,1)=n$

$P(n,2)=n.(n-1)$

$P(9,4)=9.8.7.6$ demektir.

Aslında şöyle düşünmenizde bi sakınca yok. Parantez içindeki soldaki sayıdan başlayıp geri geri gelin. Sağdaki sayı da kaç sayı geri geleceğinizi gösteriyor.

Artık P(7,3) = 7.6.5 olduğunu hemencecik söyleyivermersiniz.☺

10. $P(7,0)+P(6,1)+P(1,1)$
işleminin sonucu kaçtır?

11. $\frac{P(6,1)+P(5,2)}{P(2,2)}$
işleminin sonucu kaçtır?

12. $\frac{P(n,n)+(n+1)!}{n!}$
ifadesinin en sade biçimi nedir?

1. $\frac{3P(n,1)+P(n,2)}{n}$
ifadesinin en sade biçimi nedir?

2. $P(7,2)+P(6,1)+P(3,3)$
işleminin sonucu kaçtır?

3. $\frac{P(7,2)+P(6,1)}{P(2,2)}$
işleminin sonucu kaçtır?

4. $P(n,2)+P(n,1)=49$
olduğuna göre, n kaçtır?

5. $3P(n,2)+P(n,1)=40$
olduğuna göre, n kaçtır?

6. Bir kümenin 2 li permütasyonlarının sayısı 20 olduğuna göre, eleman sayısı kaçtır?

7. 12 atın yarıştığı bir yarışta ilk üç dereceyi paylaşan atlar kaç farklı şekilde olabilir?

8. 2 farklı oyuncak, 5 çocuktan ikisine kaç farklı şekilde verilebilir?

9. A = {a, b, c, d, e } kümesinin üç elemanı yan yana kaç farklı şekilde sıralanabilir?

10. Renkleri farklı 7 ampulden 3 tanesi yan yana kaç farklı şekilde sıralanabilir?

11. 10 katlı bir binanın asansöründe bulunan 4 kişi her katta en çok 1 kişi inmek koşuluyla asansörden kaç farklı şekilde inebilirler?

12. 4 mektup 7 posta kutusuna her kutuya en çok bir mektup atmak koşuluyla kaç farklı şekilde atılabilir?

Permütasyon sorularındaki en önemli hususlardan biri de sırası yani, yeri belli olan elemanların durumudur. Bu elemanların yeri belli olduğundan bunlar sıralamaya dâhil edilmez. Ve bu elemanların bulunduğu yer dikkate alınmaz.

13. Mavi, sarı, beyaz ve kırmızı renkli dört ampul en sağda kırmızı renkli ampul olmak koşuluyla yan yana kaç farklı şekilde dizilebilirler?

14. 2345 sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek yazılan dört basamaklı sayıların kaçı 5 ile başlar?

15. 11 kişili bir futbol takımı en önde takım kaptanı, onun arkasında da kaleci olmak koşuluyla bir sıra halinde sahaya çıkacaktır.

Kaç farklı şekilde çıkabilirler?

16. GELDİ, BUGÜN, BİZE, PİR

kelimeleri kullanılarak BUGÜN kelimesiyle başlayan kaç cümle kurulabilir?

17. MURAT kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek yazılabilen 5 harfli anlamlı ya da anlamsız kelimelerin kaçı M ile başlar?

18. SEVİM kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek yazılabilen 5 harfli, anlamlı ya da anlamsız kelimelerin kaçı M ile başlar, S ile biter?

19. Üç kişi, yan yana sıralanmış 5 koltuğa ortadaki koltuk boş kalmak şartıyla kaç farklı şekilde oturabilir?

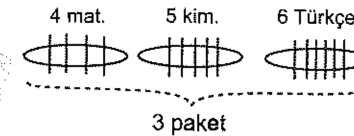
Şu örnek soruyu dikkatle inceleyin.

Örnek Soru

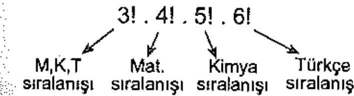
4 farklı matematik, 5 farklı kimya ve 6 farklı Türkçe kitabı bir rafa dizilecektir.

a) **Kaç farklı şekilde dizilebilir?**
b) **Aynı dersin kitaplarının tamamı yan yana olmak şartıyla kaç farklı şekilde dizilebilir?**
c) **Matematiklerin tamamı yan yana olmak şartıyla kaç farklı şekilde dizilebilir?**

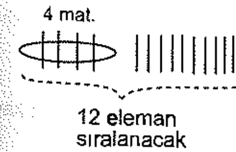
Çözelim☺
a şıkkında bir şey yok. Toplam 15 kitap var ve bu kitaplar hiçbir koşul olmadan yan yana dizilecekler. 15 farklı eleman yan yana 15! farklı şekilde sıralanabilir.
Cevap bu☺
Gelelim b ye.
Neyin istendiğini şöyle temsili bir şekilde çizeyim.



Bu tür sorularda her bir paketi ilk önce tek bir eleman gibi düşünüp sıralama yapın. Sonra da paket içindeki elemanların kendi aralarındaki sıralanışlarını bulun ve hepsini çarpın.



Burada Matematik (M), Kimya(K), Türkçe(T) olmak üzere üç paket var. Bu üç paket 3! farklı şekilde sıralanabilir.
Matematikler kendi içinde 4!, kimyalar 5! ve Türkçeler de 6! farklı şekilde sıralanabilirler. Bu durumda toplam 3!.4!.5!.6! farklı sıralama mümkün.
Anlaşıldı mı?
c şıkkında ise sadece matematikleri paketleyin ve bunu bir eleman gibi düşünün. Ama en sonda matematiklerin kendi aralarındaki sıralamayı unutmayın☺



Bu durumda 12 eleman 12! farklı şekilde sıralanır. Bir de matematiklerin kendi arasındaki sıralamalar var tabii ki. bu da 4!.
Sonuçta12!.4! farklı şekilde dizilebilirler.

1. 11 kişiden oluşan bir futbol takımının oyuncuları, 4 ü önde, 7 si arkada olmak koşuluyla kaç farklı şekilde fotoğraf çektirebilirler?

2. Farklı renkte 3 tükenmez kalem, 2 dolma kalem yan yana kaç farklı şekilde dizilebilirler?

3. 5 erkek, 3 kız öğrenci yan yana kaç farklı şekilde fotoğraf çektirebilirler?

4. 4 avukat, 3 savcı bir sıra üzerinde yan yana kaç farklı şekilde oturabilirler?

5. Farklı 4 matematik, 3 fizik, 6 kimya kitabı bir rafa yan yana kaç farklı şekilde dizilebilir?

Bir arada bulunacak elemanları paketleyin ve bir eleman gibi düşünün.☺
Ama paketteki elemanların kendi içindeki sıralamasını yapmayı da unutmayın bi zahmet.☺

6. **Farklı 4 matematik, 3 fizik, 6 kimya kitabı bir rafa aynı derse ait kitapların tamamı yan yana olmak koşuluyla kaç farklı şekilde dizilebilir?**

7. **2 öğretmen 6 öğrenci öğrencilerin tamamı ve öğretmenlerin tamamı kendi aralarında yan yana olmak koşuluyla bir sıra halinde kaç farklı şekilde oturabilirler?**

8. **4 evli çiftten oluşan 8 kişilik bir grup eşler bir arada olmak şartıyla yan yana kaç farklı şekilde sıralanabilirler?**

9. **4 erkek, 3 kız öğrenci kızların tamamı yan yana olmak şartıyla kaç farklı şekilde fotoğraf çektirebilirler?**

10. 5 Türk, 3 Alman araştırmacıya 1 den 8 e kadar numara verilecektir.

Almanların sıraları ardışık sayılar olmak koşuluyla kaç farklı şekilde sıra numarası verilebilir?

11. Zeynep ile Berra nın da aralarında bulunduğu 7 arkadaş yan yana oturacaklardır.

Zeynep ile Berra yan yana olmak koşuluyla kaç farklı şekilde oturabilirler?

12. **Farklı 4 matematik, 3 fizik, 6 kimya kitabı bir rafa matematiklerin tamamı yan yana olmak şartıyla kaç farklı şekilde dizilebilir?**

13. Ayşe ile Rana nın da aralarında bulunduğu 6 arkadaş yan yana fotoğraf çektirecektir.

Ayşe ile Rana <u>yan yana olmamak</u> koşuluyla kaç farklı şekilde sıralanabilirler?

1. **REMZİ kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek anlamlı ya da anlamsız yazılabilecek beş harfli kelimelerin kaçında R harfi ile M harfi yan yanadır?**

2. **12345 sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek tek rakamların tamamı yan yana olmak şartıyla beş basamaklı kaç farklı sayı yazılabilir?**

Dairesel Permütasyon

Kolay bi şey☺
Yuvarlak masa etrafındaki sıralamalarda bir elemanı sabit gibi düşünün ve geri kalanları normal sıralayın.
Şunu bilin yetiyor. n tane elemanın yuvarlak masa etrafındaki farklı dizilişlerinin sayısı $(n-1)!$ dir.

3. **6 kişilik bir ekip yuvarlak masada kaç farklı şekilde oturabilir?**

4. 4 Türk, 3 Japon araştırmacı yuvarlak masa toplantısı yapacaktır.

Araştırmacılar masa etrafında kaç farklı şekilde oturabilirler?

5. **Anne, baba ve 4 çocuktan oluşan bir aile yuvarlak masada anne ve baba yan yana olmak koşuluyla kaç farklı şekilde oturabilirler?**

6. 5 erkek, 3 kız öğrenci yuvarlak masa etrafında oturacaktır.

Kızlar yan yana olmak şartıyla kaç farklı şekilde oturabilirler.

7. **Anne, baba ve 3 çocuktan oluşan bir aile yuvarlak masada anne ve baba yan yana olmamak koşuluyla kaç farklı şekilde oturabilirler?**

8. **Anne, baba ve 4 çocuktan oluşan bir aile yuvarlak masa etrafında en küçük çocuk anne ile baba arasında oturmak koşuluyla kaç farklı şekilde oturabilirler?**

9. 4 evli çift yuvarlak masa etrafında evli çiftler yan yana olmak şartıyla kaç farklı şekilde oturabilirler?

10. 3 Rus, 5 Türk, 2 Alman araştırmacı, yuvarlak masa toplantısı yapacaktır.

Türklerin tamamı yan yana olmak koşuluyla kaç farklı şekilde oturabilirler?

11. 5 öğrenci, 2 öğretmen yuvarlak masa etrafında oturacaktır.

Öğretmenler yan yana olmamak şartıyla kaç farklı şekilde oturabilirler?

12. 4 erkek, 4 kız öğrenci yuvarlak masa etrafında oturacaktır.

Herhangi iki kız öğrenci yan yana olmamak şartıyla kaç farklı şekilde oturabilirler?

Tekrarlı Permütasyon

Bu da çok kolay ki.☺

Şunu bilmek lâzım. Bir gruptaki elemanları sıralarken aynı olan elemanların kendi arasında yer değiştirmesi yeni bir sıralama oluşturmaz. Bazıları aynı olan elemanları sıralarken şunu yapın. **İlk önce elemanların hepsi farklıymış gibi sıralama yapın. Sonra da aynı olanların faktöriyeline bölün.**

Örnek Soru

KAPKARA

kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek anlamlı veya anlamsız yedi harfli kaç kemle yazılabilir?

Çözelim☺

Verilen kelime 7 harften oluşuyor. Dolayısıyla 7 harf yan yana sıralanacak. Eğer harflerin hepsi farklı olsaydı 7! farklı sıralama yapılabilirdi. Lâkin harflerin 3 tanesi A olduğundan 7 faktöriyeli 3 faktöriyele ve 2 tanesi de K olduğundan 2 faktöriyele bölmek lâzım. Bu durumda çoğunun bir anlamı olmasa bile☺

$\frac{7!}{3! \cdot 2!} = 420$ farklı kelime yazılabilir.

13. PARA

kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek dört harfli anlamlı ya da anlamsız kaç farklı kelime yazılabilir?

14. ZELZELE

kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek yedi harfli anlamlı ya da anlamsız kaç farklı kelime yazılabilir?

1. 335511

sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek birbirinden farklı, altı basamaklı kaç sayı yazılabilir?

2. 55522233

sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek birbirinden farklı sekiz basamaklı kaç sayı yazılabilir?

Unutmayın☺ Özdeş nesnelerin sıralanmasında da tekrarlı permütasyon söz konusudur. Bilginiz olsun.

3. Özdeş 3 mavi, 2 yeşil kalem yan yana kaç farklı şekilde dizilebilirler?

4. LEBLEBİ

kelimesinin harfleri yer değiştirerek yazılan yedi harfli anlamlı ya da anlamsız kelimelerin kaçı L ile başlar B ile biter?

5. Özdeş 2 mavi, 3 yeşil, 4 kırmızı boncuk yan yana kaç farklı şekilde dizilecektir.

Kırmızı boncukların tamamı bir arada olmak koşuluyla kaç farklı şekilde dizilebilirler?

6. 61196761

sayısının rakamları yer değiştirilerek onlar basamağı 9 olan sekiz basamaklı kaç farklı sayı yazılabilir?

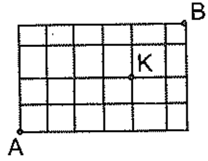
7. KARAKOÇ

kelimesinin harfleri yer değiştirilerek yazılan yedi harfli anlamlı yada anlamsız kelimelerin kaçın K ile başlar Ç ile biter?

8. KÜÇÜKKAYA

kelimesinin harfleri yer değiştirerek yazılan dokuz harfli anlamlı yada anlamsız kelimelerin kaçında K harfleri yan yanadır?

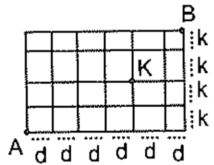
Örnek Soru



Şekil bir kasabada birbirini dik kesen sokakları göstermektedir.

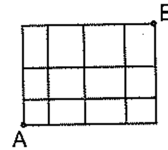
Buna göre A dan B ye en kısa yolla gitmek isteyen bir kişi K dan geçmek koşuluyla kaç farklı yolla gidebilir?

Çözelim☺
İlginç bir soru.
Şekle göre anlatayım. En kısa yoldan kasıt A dan yola çıkınca sadece ya sağa (→, doğuya(d)) ya da yukarı (↑, kuzeye(k)) giderek önce K , sonra da B ye varmak.



Önce K ya gidelim.
K ya gitmek için 4 tane d, 2 tane de k yolu gitmek lâzım. (ddddkk yı nasıl sıralarsanız sıralayın. K ya varırsınız.) ddddkk yı $\frac{6!}{4!.2!} = 15$ farklı şekilde sıralayabileceğinizden A dan K ya 15 değişik yolla gidebilirsiniz.
K dan B ye ise ddkk yı kaç farklı şekilde sıralayabilirseniz o kadar farklı yoldan gidebilirsiniz. Bu da $\frac{4!}{2!.2!} = 6$ olduğundan 6 farklı yolla gidebilirsiniz.
A dan B ye ise bu ikisinin çarpımı kaç ise o kadar yolla gidebilir.
Düşünün bakalım bunlar niye çarpılıyor?
Yani, 15.6 = 90 farklı yolla gidebilir.

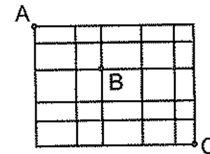
9.



Şekildeki çizgiler bir kentin birbirini dik kesen sokaklarını göstermektedir. A noktasından B noktasına en kısa yoldan gidilecektir.

Buna göre, A dan B ye kaç farklı yoldan gidilebilir?

10.



Şekildeki çizgiler bir kentin birbirini dik kesen sokaklarını göstermektedir. A noktasından C noktasına en kısa yoldan gidilecektir.

Buna göre, A dan C ye B noktasından geçmek şartıyla kaç farklı yoldan gidilebilir?

Şu soruda ardışık her iki harf arasını bir yol gibi düşünün. T → R → A → B de özdeş 3 yol var meselâ.☺

11.

T R A B
R A B Z
A B Z O
B Z O N

Baştaki T harfinden başlayarak sondaki N harfine kadar komşu harfleri izleyerek TRABZON kelimesi kaç değişik biçimde okunabilir?

KOMBİNASYON

Permütasyondan daha kolay bir konu.
Eğer kümeler konusundaki alt küme olayını biliyorsanız (ki biliyor olmanız lâzım☺) kombinasyonu da biliyorsunuz demektir. Bilmiyorsanız onu da burada öğrenirsiniz artık.☺
Kombinasyon farklı seçimlerin (oluşturulabilecek farklı grupların) sayısıdır. Dolayısıyla belli sayıdaki eleman arasından bir kısmı seçilecekse bu kombinasyon sorusudur.
Kombinasyonda önemli olan grubu oluşturmaktır. Gruptaki elemanların sırasının bir önemi yok.
(Ama permütasyonda sıra acayip önemliydi.☹)

Örneğin, A = {a, b, c, d} kümesinin iki elemanlı alt kümeleri (veya ikili kombinasyonları) {a,b}, {a,c}, {a,d}, {b,c}, {b,d}, {c,d} dir.
Burada kombinasyon ile alt kümenin aynı şeyler olduğunu görün.
Aynı şekilde 5 kişi arasından seçilecek 3 kişilik farklı grupların sayısı ile 5 elemanlı bir kümenin 3 elemanlı alt küme sayısı aynı ve $\binom{5}{3} = 10$ dur.

Kümelerden hatırlayacaksınız☺
7 elemanlı kümenin,

2 elemanlı alt küme sayısı $\binom{7}{2} = \frac{7.6}{1.2} = 21$

3 elemanlı alt küme sayısı $\binom{7}{3} = \frac{7.6.5}{1.2.3} = 35$ idi.

Ve genel olarak $C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}$ idi.

1. $\binom{5}{2}+\binom{6}{3}$ **toplamı kaça eşittir?**

2. $\binom{8}{2}+\binom{9}{1}+\binom{3}{3}$ **toplamı kaça eşittir?**

3. $\binom{10}{2}+\binom{4}{2}+\binom{2}{2}$

toplamı kaça eşittir?

4. $\frac{C(x+1,1)}{C(3,2)} = 2$

olduğuna göre, x kaçtır?

5. **6 elemanlı bir kümenin 2 elemanlı alt kümelerinin sayısı kaçtır?**

6. **6 farklı kitap arasından ikisi kaç farklı şekilde seçilebilir?**

7. **8 kişilik bir sporcu grubu arasından 5 kişilik bir basket takımı kaç farklı şekilde oluşturulabilir?**

8. 10 kişilik bir öğrenci grubu arasından 3 kişilik bir izci grubu kaç farklı şekilde seçilebilir?

9. Bir çember üzerindeki farklı 9 noktadan üçü kaç farklı şekilde seçilebilir?

10. Bir doğru üzerindeki 12 farklı noktadan 2 si kaç farklı şekilde seçilebilir?

11. 7 pazarlamacı arasından üçü seçilerek Trabzon'a gönderilecektir.

Bu üç kişi kaç farklı şekilde seçilebilir?

Kombinasyonla ilgili şu özellikler işinize yarayabilir.☺

$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$ dir.

$\binom{5}{0}=\binom{6}{0}=\binom{9}{0}=...=1$ dir.

Aynı şekilde $\binom{5}{5}=\binom{6}{6}=\binom{9}{9}=...=1$ dir.

12. $\binom{8}{0}+\binom{4}{4}+\binom{3}{0}$ **toplamı kaça eşittir?**

13. $\binom{8}{2}+\binom{7}{7}+\binom{6}{0}$ **toplamı kaça eşittir?**

14. $\binom{5}{0}+\binom{6}{1}+\binom{12}{11}+\binom{14}{14}$ **toplamı kaça eşittir?**

$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$ dir.Ve bu daha önemli kesinlikle.

$\binom{8}{5}=\binom{8}{3}$ tür. (5 + 3 = 8 olduğuna dikkat edin)

$\binom{10}{7}=\binom{10}{3}$ tür. (7 + 3 = 10 olduğuna dikkat edin.)

15. $\binom{9}{x}=\binom{9}{6}$

olduğuna göre, x hangi değerleri alabilir?

Eğer bir soruda seçim söz konusuysa veya grup oluşturulacaksa bu soru kombinasyon sorusudur.

1. 5 erkek ve 3 kız öğrenci arasından 1 erkek 1 kızdan oluşan iki kişilik bir yarışma ekibi kaç farklı şekilde oluşturulabilir?

2. Birbirinden farklı 6 sağlam, 4 bozuk kalem arasından 1 sağlam, 1 bozuk kalem kaç farklı şekilde seçilebilir?

3. 15 kişilik bir sınıftan 1 başkan ve 2 yardımcıdan oluşan 3 kişilik bir ekip kaç farklı şekilde seçilebilir?

4. 4 matematik, 5 Türkçe öğretmeni arasından 2 matematik, 1 Türkçe öğretmeni kaç farklı şekilde seçilebilir?

5. Bir şirketteki 8 pazarlamacıdan 5 i Trabzon'a 3 ü Antalya'ya gönderilecektir.

Bu gruplar kaç farklı şekilde oluşturulabilir?

6. Bir Gitar kursundaki iki sınıftan birinde 3, diğerinde 2 kişilik boş yer vardır.

Bu kursa yeni kayıt olan 5 kişi bu sınıflara kaç farklı şekilde yerleştirilebilir?

7. A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

kümesinin elemanları arasından iki tek bir çift rakam kaç farklı şekilde seçilebilir?

8. A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

kümesinin elemanları arasından seçilen iki elemanın toplamı tektir.

Buna göre, bu seçim kaç farklı şekilde yapılabilir?

9. **2 matematik, 3 tarih ve 4 Kimya kitabı arasından 1 matematik, 1 tarih ve 1 kimya kitabı kaç farklı şekilde seçilebilir?**

10. $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

kümesinden seçilen iki elemanın çarpımı negatif olduğuna göre bu elemanlar kaç farklı şekilde seçilebilir?

11. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

kümesinin en az iki elemanlı kaç alt kümesi vardır?

12. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

kümesinin en az bir elemanı çift olan 2 elemanlı kaç alt kümesi vardır?

13. Ayşe'nin 4, Rana'nın 5 farklı kitabı vardır.

Buna göre, Ayşe ve Rana ikişer kitabı kaç farklı şekilde değiştirebilir?

14. **4 matematik, 3 Türkçe öğretmeni arasından en az biri matematikçi olan 2 öğretmen kaç farklı şekilde seçilebilir?**

15. **5 erkek ve 3 kız öğrenci arasından en az ikisi erkek olan 3 kişilik bir ekip kaç farklı şekilde seçilebilir?**

16. Bir öğrenciden girdiği bir sınavda sorulan 10 sorudan sadece 7 ine cevap vermesi isteniyor.

Cevaplayacağı soruları kaç farklı şekilde seçebilir?

1. Bir öğrenci girdiği bir sınavda sorulan 10 sorudan sadece 7 ine cevap vermesi isteniyor.

İlk 6 sorudan sadece 5 ini cevaplaması gerektiğine göre, cevaplayacağı soruları kaç farklı şekilde seçebilir?

2. **5 matematik öğretmeni ve 4 geometri öğretmeni arasından, en çok 2 matematik öğretmenin bulunduğu 4 kişilik bir komisyon kaç farklı şekilde seçilebilir?**

3. 15 öğrencinin bulunduğu bir sınıfta erkek öğrencilerle yapılabilecek ikişerli grupların sayısı kız öğrencilerin sayısına eşittir.

Buna göre, sınıfta kaç kız öğrenci vardır?

Kombinasyon sorularındaki en önemli hususlardan biri de " grupta şu olsun. Şu olmasın." meselesi.

Diyelim ki aralarında Zeynep ve Zelâl'in de bulunduğu 10 kişilik bir grup var. Ve bu gruptan 3 kişi seçeceksiniz.

Seçeceksiniz. Ama bir şartla. Seçilecek grupta Zeynep bulunacak, Zelâl ise bulunmayacak.

Peki, bu durumda seçimi nasıl yapardınız?

İşte bu seçimin mantığını anlamaya çalışın. Burayı hallederseniz gerisi kolay☺

Örnek Soru

$A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinin kaçında

a) a bulunmaz?
b) a bulunur?
c) a ve b bulunur?
d) a bulunur, b bulunmaz?

Çözelim☺

Eğer bir kümenin elemanlarından ikisi, üçü, ... filan seçilecekse bu kombinasyon sorusuydu.

Ama korkmayın☺ Bu tür soruların hem mantığı hem de çözümü acayip kolay.☺ Bakın şimdi☺

a) Kümede 7 eleman var. Bize 3 tanesi lâzım. Ama içlerinde a olsun istemiyoruz. Pekâlâ, a yı atalım o zaman. Ve geriye kalan 6 eleman arasından yani, {b, c, d, e, f, g} kümesinin elemanlarından 3 tanesini seçelim.

Bu da $\binom{6}{3} = 20$ tanedir.

b) Şimdi de içinde a olan 3 elemanlı alt küme sayısını bulmak istiyoruz. Kümede a kesinlikle bulunacağına göre a dışındaki 6 eleman arasından iki tane daha seçmek lâzım ki alt küme toplam 3 elemanlı olsun.

Bu da $\binom{6}{2} = 15$ olduğundan cevap 15 tir.

c) Üç elemanlı olacak. Ama ikisi belli zaten. Biri a diğeri de b. O halde bize 1 eleman daha lâzım. Bu 1 elemanı da a ve b dışındaki 5 eleman arasından seçersiniz artık. Bu da $\binom{5}{1} = 5$ olduğundan cevabımız 5 olacaktır.

Anlaşılıyor mu?

d) Şimdi de yazacağımız 3 elemanlı alt kümede a olsun ama b olmasın istiyoruz. Bu da çok basit. Bir kere olmasını istemediğimiz elemanı (b yi) atalım. Geriye kaldı 6 eleman. Şimdi bu 6 eleman arasından seçilecek 3 elemanın biri (a elemanı) zaten belli. Bu durumda bize 2 eleman daha lâzım. Ve bunu geriye kalan 5 eleman arasından seçmemiz gerekiyor.

Bu da $\binom{5}{2} = 10$ olduğundan cevabımız 10 olacaktır.

Kısacası bu tür sorularda belli sayıdaki elemanı seçerken alt kümede olması istenen alınır ve kalan elemanlar arasından eksikler seçilir. Eğer alt kümede olması istenmeyen elemanlar varsa seçim işlemi bu elemanlar atıldıktan sonra yapılır.

4. A = { a, b, c, d}
kümesinin 2 elemanlı alt kümelerinin kaçında a bulunmaz?

5. A = { a, b, c, d, e, f}
kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinin kaçında a bulunmaz?

6. A = { a, b, c, d, e, f}
kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinin kaçında a ve b bulunmaz?

7. A = { a, b, c, d, e, f}
kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinin kaçında a bulunur?

8. A = { a, b, c, d, e, f}
kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinin kaçında a ve b bulunur?

9. A = { a, b, c, d, e, f}
kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinin kaçında a bulunur, b bulunmaz?

10. A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}
kümesinin 2 elemanlı alt kümelerinin kaçında çift rakam bulunmaz?

11. A = { – 2, – 1, 0, 1, 2, 3}
kümesinin 2 elemanlı alt kümelerinin kaçının elemanları çarpımı negatiftir?

1. A = {– 3, – 2, – 1, 0, 1, 2, 3, 4}
kümesinin 2 elemanlı alt kümelerinin kaçının elemanları çarpımı pozitiftir?

2. A = {1, 2, 3, 4, 5, 6,7}
kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinin kaçının elemanları çarpımı tektir?

3. A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}
kümesinin 2 elemanlı alt kümelerinin kaçının elemanları çarpımı çifttir?

4. **5 erkek, 4 kız öğrenci arasından seçilebilecek 2 şerli grupların kaçında kız öğrenci bulunmaz?**

5. 9 basketbolcu arasından sahaya çıkacak ilk 5 kişi seçilecektir.

Bu oyunculardan Ersan ve Semih'in sahaya daima ilk beşte çıktığı bilindiğine göre, ilk beş kaç farklı şekilde seçilebilir?

6. Aralarında Zeynep ve Nihal in de bulunduğu 10 kişilik bir grup içinden 3 kişi seçilecektir.

Seçilecek grupta Zeynep ne Nihal kesinlikle bulunacağına göre bu seçim kaç farklı şekilde yapılabilir?

7. Aralarında Cem ve Mehmet'in de bulunduğu 8 kişi arasından 4 kişilik bir ekip seçilecektir.

Cem'in bulunacağı ama Mehmet'in bulunmayacağı bu ekip kaç farklı şekilde seçilebilir?

8. Aralarında Ayşe ve Zelâl in de bulunduğu 9 kişilik bir gruptan biri 4 kişilik diğeri 5 kişilik iki gezi grubu oluşturulacaktır.

Ayşe ve Zelâl farklı gruplarda olmak şartıyla kaç farklı seçim yapılabilir?

9. Aralarında Rana ve Zeynep in de bulunduğu 7 kişilik bir gruptan biri 4 kişilik diğeri 3 kişilik iki gezi grubu oluşturulacaktır.

Rana ve Zeynep aynı grupta olmak şartıyla kaç farklı seçim yapılabilir?

Aklınızda kalsın☺
"**... en az bir tane... bulunur?**" gibi sorularda tüm olası seçimlerden istenmeyen seçimlerin sayısı çıkarılır.

Örnek Soru

5 matematik, 4 kimya kitabı arasından 3 kitap seçilecektir

Bu seçimlerin kaçında en az 1 kimya kitabı bulunur?

Çözelim☺
Az önce dediğim gibi yapın. Seçilecek olan 3 kitaptan en az biri kimya olacak. Yani, hepsi matematik olmayacak.☺ Öyle değil mi?
O halde seçilebilecek tüm 3 lü grup sayısından tamamı matematik olan 3 lü grup sayısını çıkaracaksınız.

Bu da $\binom{9}{3}-\binom{5}{3}=84-10=74$ tanedir.

Anladınız mı?
Geçtim.☺

10. $A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

kümesinin en az biri çift olan 3 elemanlı alt küme sayısı kaçtır?

11. 4 Matematik, 3 Tarih öğretmeni arasından 3 kişilik bir komisyon oluşturulacaktır.

Bu komisyonların kaçınca en az 1 tarih öğretmeni bulunur?

12. **5 erkek, 4 kız öğrencinin bulunduğu bir gruptan, içlerinde en az bir kız öğrencinin bulunduğu 4 kişilik bir gezi grubu kaç farklı şekilde seçilebilir?**

13. **Birbirinden farklı 3 sağlam, 5 i bozuk ampul arasından en az biri sağlam olan 3 ampul kaç farklı şekilde seçilebilir?**

14. **5 erkek, 4 kız öğrenci arasından seçilecek 3 kişilik grupların kaçında en az 2 erkek bulunur?**

1. **1 den 9 a kadar olan rakamlar arasından çarpımları çift olan üç rakam kaç farklı şekilde seçilebilir?**

2. Bir okuldaki 8 seçmeli dersin ikisi aynı saatte verilmektedir.

Bu derslerden üç tanesini seçmek isteyen bir öğrenci kaç farklı seçim yapabilir?

3. 4 erkek, 5 kız öğrencinin bulunduğu bir gruptan rastgele 3 öğrenci seçiliyor.

Seçilen öğrenciler arasında en az bir kız ve bir erkek öğrenci olduğuna göre, bu öğrenciler kaç farklı şekilde seçilebilir?

Bazı sorularda kombinasyon ve permütasyon iç içedir. Bu tür soruların çoğunda önce seçim (kombinasyon) sonra da sıralama (permütasyon) yapılır.

4. **2 kişi yan yana sıralı 5 koltuktan ikisine kaç farklı şekilde oturabilir?**

5. Birbirinden farklı 3 matematik ve 4 kimya kitabı arasından 2 matematik, 1 kimya kitabı seçiliyor.

Buna göre, seçilen kitaplar bir rafa, kaç farklı şekilde dizilebilirler?

6. $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

kümesinin elemanlarıyla rakamlarından ikisi tek biri çift olan kaç farklı sayı yazılabilir?

7. **4 öğrenci, 6 öğretmen arasından seçilen 3 öğrenci ve 2 öğretmen yan yana kaç farklı şekilde sıralanabilir?**

8. **6 kişi arasından seçilen 4 kişi yuvarlak bir masa etrafında kaç farklı şekilde oturabilirler?**

Örnek Soru

Düzlemde 5 i doğrusal toplam 8 nokta veriliyor.

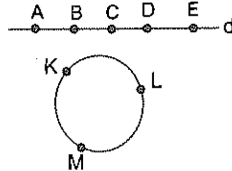
a) Bu noktaların sadece ikisinden geçecek şekilde kaç farklı doğru çizilebilir?

b) Köşeleri bu noktalar olan kaç farklı üçgen çizilebilir?

Çözelim☺

Önce a ya bakalım.
Bu tür sorularda şunları bilmeniz gerekiyor. İki noktadan geçen sadece bir doğru çizilebileceğini. Ve doğrusal olan (aynı doğru üzerinde olan) noktalardan geçen sadece bir doğru olduğunu.

Üstteki soruyu temsilen şöyle düşünün. Bir doğru üzerinde 5 nokta ve bunlar dışında çember üzerinde 3 nokta.



Normalde doğrusal olan noktalar (A, B, C, D, E noktaları) olmasaydı bu 8 noktadan seçilen herhangi iki noktadan geçecek şekilde bir doğru çizilebilirdi. Ve bu durumda cevap da $\binom{8}{2}=28$ olurdu. Ama gelin görün ki bu noktalardan 5 tanesi (A, B, C, D ve E) doğrusal olduğundan dolayı bu 5 nokta ile sadece bir doğru (d doğrusu) çizilebiliyor. Normalde bu 5 nokta ile $\binom{5}{2}=10$ doğru çizilebilirdi. Bunlar kayıp doğrulardır. Yani 10 yerine 1 tane çizilebiliyor☺

Toparlarsak; $\binom{8}{2}-\binom{5}{2}+1=19$ doğru çizilebiliyor.

Bu tür sorularda herhangi üçü doğrusal olmasaydı çizilebilecek doğrulardan kayıp doğruları çıkarın. (Ama doğrusal olanlardan geçecek olan doğruyu da unutmayın. İşin özeti bu☺

Gelelim b şıkkına.
Üçgen için üçü aynı doğru üzerinde olmayan 3 nokta seçmek lâzım. Aynı doğru üzerindeki (yani, doğrusal olan) 3 nokta ile üçgen çizemezsiniz. Deneyin isterseniz.☺
Doğrusallık filan olmasaydı köşeleri bu noktalar olan toplam $\binom{8}{3}=56$ üçgen çizebilirdiniz. Öyle ya seçtiğiniz her üç nokta bir üçgen demekti. Ama 5 i doğrusal olduğundan bu 5 nokta içinden seçeceğiniz herhangi üç nokta ile üçgen çizemezsiniz. Dolayısıyla da $\binom{5}{3}=10$ tane üçgeniniz kaybolur.

Bu durumda normalde çizebileceğiniz tüm üçgenlerden kayıp olanları çıkarırsanız

$\binom{8}{3}-\binom{5}{3}=56-10=46$ tane üçgen çizebilirsiniz.

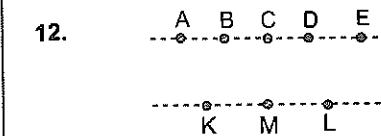
Bunları çizmeye kalkmayın tabii ki. Ama vaktiniz çoksa keyfiniz bilir☺

9. Bir çember üzerindeki 7 noktanın sadece ikisinden geçecek şekilde en çok kaç farklı doğru çizilebilir?

10. Herhangi üçü doğrusal olmayan 6 noktanın sadece ikisinden geçecek şekilde en çok kaç doğru çizilebilir?

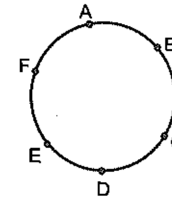
11. 3 ü doğrusal olmak üzere toplam 8 noktanın en az ikisinden geçecek şekilde kaç farklı doğru çizilebilir?

12.



Şekildeki 8 noktanın en az ikisinden geçecek şekilde kaç farklı doğru çizilebilir?

1.



Şekildeki çember üzerinde verilen 6 nokta ile köşeleri bu noktalar olan,

a) Kaç üçgen çizilebilir?

b) Kaç dörtgen çizilebilir?

Bir de şunu bilmek lâzım.☺(Ne kadar çok şey bilmeniz gerekiyor di mi?☺

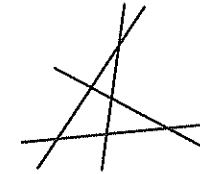
Paralel olmayan iki doğru bir noktada kesişir. Paralel olan doğrular kesişmezler. Yani bir nokta oluşturmazlar.
Dolayısıyla her hangi ikisi paralel olmayan ve her hangi üçü aynı noktada kesişmeyen doğruların oluşturduğu nokta sayısını bulmak için 2 doğru, üçgen sayısını bulmak için 3 doğru seçmek lazım gibi...

2. Aynı düzlemde bulunan ve herhangi ikisi paralel olmayan 8 doğru,

a) En çok kaç noktada kesişebilir?

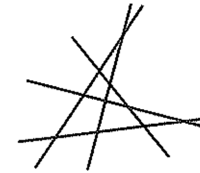
b) Bu doğruların kesişmesiyle en çok kaç üçgen oluşur?

3.



Şekildeki 4 doğrunun kesişimiyle kaç farklı üçgen oluşmuştur?

4.



Şekildeki 5 doğrunun kesişimiyle kaç farklı üçgen oluşmuştur?

5. Aynı düzlemdeki 4 ü paralel olan toplam 9 doğru en çok kaç noktada kesişirler?

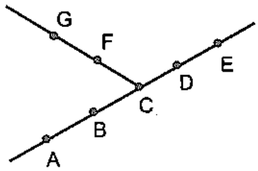
6. 3 ü bir A noktasında kesişen toplam 6 doğrunun en çok kaç noktada kesişir?

Bilginiz olsun☺
İki çember en çok iki noktada kesişir.

7. **Bir düzlemdeki 3 çember en çok kaç noktada kesişir?**

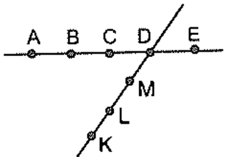
8. **Bir düzlemdeki 5 çember en çok kaç noktada kesişir?**

9.



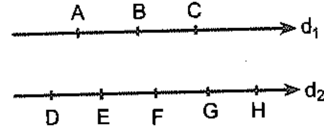
Şekildeki 7 nokta ile köşeleri bu noktalar olan kaç değişik üçgen çizilebilir?

10.



Şekildeki 8 nokta ile köşeleri bu noktalar olan kaç değişik üçgen çizilebilir?

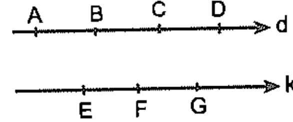
11.



Şekildeki d_1 doğrusu üzerinde A, B ve C noktaları d_2 doğrusu üzerinde ise D, E, F, G ve H noktaları verilmiştir.

Buna göre, köşeleri bu noktalar olan ve sadece bir köşesi d_1 doğrusu üzerinde olan kaç farklı üçgen çizilebilir?

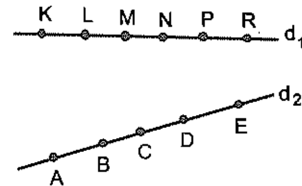
12.



Şekilde d doğrusu üzerinde A, B, C, D ve k doğrusu üzerinde E, F ve G noktaları verilmiştir.

d // k olduğuna göre, köşeleri bu noktalar olan kaç farklı üçgen çizilebilir?

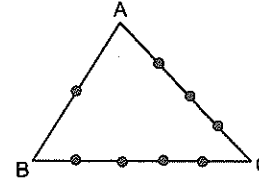
13.



Şekilde d_1 doğrusu üzerindeki K, L, M, N, P ve R noktalarıyla d_2 doğrusu üzerindeki A, B, C, D ve E noktaları verilmiştir.

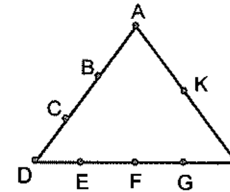
Bir köşesi B olan kaç üçgen çizilebilir?

1.



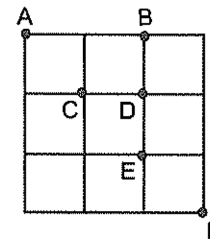
Şekildeki ABC üçgeninin kenarları üzerinde verilen 8 nokta ile köşeleri bu noktalar olan kaç farklı üçgen çizilebilir?

2.



Köşeleri şekildeki A, B, C, D, E, F, G, H ve K noktalarından üçü olan kaç farklı üçgen çizilebilir?

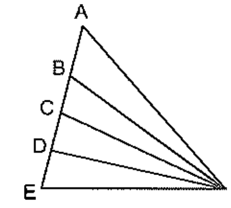
3.



Eş karelerden oluşan şekilde A, B, C, D, E ve F noktaları verilmiştir.

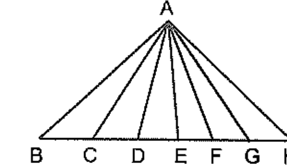
Buna göre, köşeleri bu noktalar olan kaç farklı üçgen çizilebilir?

4.



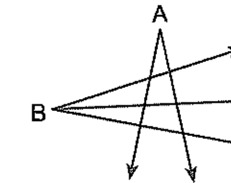
Şekilde kaç farklı üçgen vardır?

5.



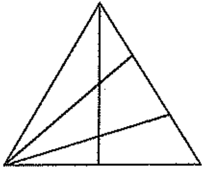
Şekilde kaç farklı üçgen vardır?

6.



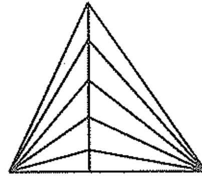
Şekildeki A noktasından çıkan 2, B noktasından çıkan 3 ışının kesişmesiyle kaç üçgen oluşmuştur?

7.



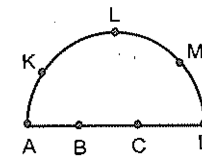
Şekilde kaç farklı üçgen vardır?

8.



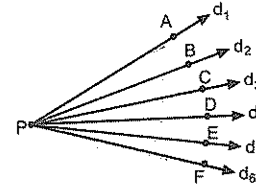
Şekilde kaç üçgen vardır?

9.



Şekildeki yedi nokta ile köşeleri bu noktalar olan kaç üçgen çizilebilir?

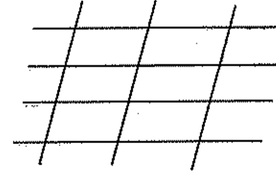
10.



Şekilde P noktasından çıkan 6 ışın verilmiştir.

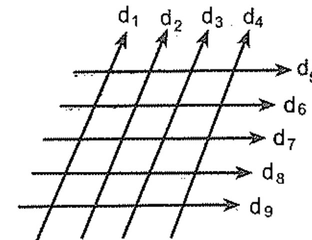
$m(\widehat{APF}) < 90°$ **olduğuna göre, bu ışınlar kaç farklı dar açı oluşturur?**

11.



şekilde kaç tane dörtgen vardır?

12.



$d_1 // d_2 // d_3 // d_4$ **ve** $d_5 // d_6 // d_7 // d_8 // d_9$ **olduğuna göre, şekilde kaç paralelkenar vardır?**

BİNOM AÇILIMI

Çok kısa bir konu.

Sadece bir tane formülcüğü var. O kadar. Ve birkaç tane de soru tipi ☺

$(a+b)^2, (a+b)^3, \ldots$ nün neye eşit olduğunu biliyorsunuz değil mi? (Bilmeniz lâzım da☺)

İşte bu tür iki terimli açılımların daha genel ifadesi olan

$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n}a^0 b^n$

açılımına **binom açılımı** deniyor.

Zaten binom, iki terimli demek. Dolayısıyla bu da iki terimlinin açılımı oluyor.☺

Meselâ

$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3b^0 + \binom{3}{1}a^2b^1 + \binom{3}{2}a^1b^2 + \binom{3}{3}a^0b^3$ tür.

Dikkat edin. Bu açılımda a nın üssü azalırken b ninki artıyor. Ve a ve b nin üslerinin toplamı da hep 3 e eşit.

İsterseniz bu açılımı düzenleyerek

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ yi elde edebilirsiniz.☺

$(a+b)^n$ açılımında,

- **n + 1 tane terim vardır.(Açıp sayabilirsiniz.☺)**
- **Her terimde a ve b nin üsleri toplamı n dir.**
- **Kat sayılar toplamını bulmak için değişkenlere "1" değeri verilir.**
- $(a+b)^n$ **açılımını a nın azalan kuvvetlerine göre yazıldığında**

Baştan 2. terim $\binom{n}{1}a^{n-1}b^1$,

Baştan 3. terim $\binom{n}{2}a^{n-2}b^2$,

Baştan 4. terim $\binom{n}{3}a^{n-3}b^3$,

Baştan 5. terim $\binom{n}{4}a^{n-4}b^4$ tür.

Artık buradan bir sonuç çıkarırsınız☺

Bu şekilde yazmamdaki maksadımı anlamışsınızdır.

Baştan (k + 1). terim ise $\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ **dır.**

Örnek verince daha iyi anlayacaksınız.

Örnek Soru

$(x-2)^5$ **açılımı x in azalan kuvvetlerine göre yazıldığında baştan 4. terim nedir?**

Çözelim.☺

Bu açılımda kaç terim var?

6. Öyle değil mi? Çünkü terim sayısı üssün bir fazlası kadardı. Ama bize bu lâzım değil ki☺

Bizden istenen baştan 4. terim.

Bulalım.

Bir kere katsayısı $\binom{5}{3}$ ü olacak. (Altta 4 ün bir eksiği olacak). Gerisi kolay. İçteki terimlerden birincisinin üssü (5 – 3), ikincisinin ise 3 olacak. Bu durumda

baştan 4. terim $\binom{5}{3}x^{5-3}\cdot(-2)^3 = -80x^2$ olur.

Anlaşılmayan bi yer?

Örnek Soru

$\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^7$

açılımındaki x^5 **li terimin kat sayısı kaçtır?**

Çözelim☺

Bu tür sorularda yapmanız gereken şey çok basit.

x^5 li terimin kat sayısını bulacaksınız. İlk önce

$\binom{7}{k}(x^2)^{7-k}.\left(-\frac{2}{x}\right)^k$ yı yazın x in üslerini düzenleyerek 5 e eşitleyin ve k yı bulun. Sonra da bu k yı yerine yazın.

k yı kaç buldunuz? 3 değil mi?

Artık k ya 3 vererek x^5 li terimin kat sayısının

$\binom{7}{3}(-2)^3x^5$ ten –280 olduğunu bulursunuz.

Ama bu tür soruları deneyerek de yapabilirsiniz☺

İlk başta sayıları boş verin. x in üslerine bakın. k ya 1 verince $(x^2)^{7-1}.\frac{1}{x^1} = x^{11}$ çıkıyor. 2 verince x in üssü 8 çıkıyor. 3 verince ise x in üssü 5 çıkıyor☺

Demek x üzeri 5 li terim☺ k = 3 için bulunuyormuş.

k = 3 için

$\binom{7}{k}(x^2)^{7-k}.\left(-\frac{2}{x}\right)^k = \binom{7}{3}(x^2)^{7-3}\left(\frac{-2}{x}\right)^3 = -280x^5$

oluyormuş.

Yani , x^5 li terimin kat sayısı –280 imiş.

Pascal Üçgeni

Üçgene bak be... Ne üçgen amma!
Adam nasıl bulmuş bunu ya!
Bilmezsiniz tabii ki. Bu üçgeni bizim Ömer Hayyam daha önce bulmuş. Ama adı Pascal olmadığı için adını tarihe yazdıramamış. Ya da Pascal ın adı Mehmet olsaydı o da yazdıramayacaktı☺
Önce Pascal ın bu üçgeni nasıl oluşturduğundan bahsedeyim....☺

$\binom{0}{0}$ ---------- $(a+b)^0$

$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$ ---------- $(a+b)^1$

$\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$ ---------- $(a+b)^2$

$\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$ ---------- $(a+b)^3$

$\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$ ----- $(a+b)^4$

İyi de bu ne işe yarıyor? Değil mi?
Onu da söyleyeyim. Bu üçgen binom (iki terimli) açılımındaki, kat sayıları bulmaya yarıyor.
Rahatladınız mı şimdi.☺
Örneğin,

$$(a+b)^3=\binom{3}{0}a^3b^0+\binom{3}{1}a^2b^1+\binom{3}{2}a^1b^2+\binom{3}{3}a^0b^3$$

Gördüğünüz gibi iki terimli ifadelerin kuvvetleri böyle de bulunabiliyor. Bilginiz olsun.
Mesela, $(a+b)^4$ ü açalım mı?
Önce,

$$(a+b)^4=\square a^4+\square a^3b^1+\square a^2b^2+\square a^1b^3+\square b^4$$

Yazarsınız. Sonra da $\square$ yerlerine,

$\binom{4}{0}, \binom{4}{1}, \binom{4}{2}, \binom{4}{3}, \binom{4}{4}$ ifadelerini sırayla yazarsınız. Ama sırayı karıştırmayasınız sakın.☺

Eğer a ile b arasındaki işaret eksi olursa? O zaman ne değişir?
Neyse...o zaman da b yerine – b yazarsınız olur biter.

1. $(3x+2)^8$
açılımında kaç terim vardır?

2. $(x+y)^8=...+Ax^3y^n+...$
olduğuna göre, n kaçtır?

3. $(x+2y)^n=...+Ax^4y^5+...$
olduğuna göre, n kaçtır?

4. $(x+3)^3=...+Ax^2+...$
olduğuna göre, A kaçtır?

5. A = 65 ve B = – 63 için,
$A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$
ifadesinin değeri kaçtır?

1. $x=\sqrt[3]{5}-1$ için,
x^3+3x^2+3x+1
ifadesinin değeri kaçtır?

2. x = 61 ve y = 30 için,
$x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$
ifadesinin değeri kaçtır?

3. $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
ifadesinin a = 100 ve b = – 99 için değeri kaçtır?

4. $x=\sqrt[5]{3}-1$ **için**
$x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1$
ifadesinin değeri kaçtır?

5. $(a+b)^{14}$
açılımında baştan 7. terimin kat sayısı kaçtır?

6. $(a-b)^{23}$
açılımında baştan 10. terimin kat sayısı kaçtır?

7. $(a+b)^8$
açılımındaki a^4 lü terimin katsayısı kaçtır?

8. $(x+3)^4$
açılımındaki x li terimin katsayısı kaçtır?

9. $(a+b)^n$

açılımındaki 7 terim olduğuna göre, a^4 lü terimin kat sayısı kaçtır?

10. $(a+b)^n$

açılımındaki terimlerden biri Ka^3b^2 olduğuna göre, K kaçtır?

11. $P(x)=(x-2)^5$

polinomunda x^2 li terimin kat sayısı kaçtır?

12. $P(x)=(x+2)^4+4(x-1)^3$

polinomunda x li terimin kat sayısı kaçtır?

13. $P(x)=(x-2)^5+4(x+1)^2$

polinomunda x^2 li terimin kat sayısı kaçtır?

14. $\left(x^2+1\right)^5$

açılımında x^6 lı terimin kat sayısı kaçtır?

15. $(2x+y)^6$

açılımında y^4 lü terimin kat sayısı kaçtır?

16. $(x-2y)^4$

açılımında y^3 lü terimin kat sayısı kaçtır?

1. $(2x-1)^5=\ldots+kx^3+\ldots$

olduğuna göre, k kaçtır?

2. $(2x+y)^8=\ldots+28mx^5y^3+\ldots$

olduğuna göre, m kaçtır?

3. $(2x-3y)^9=\ldots+2^5 3^4 m x^5 y^4+\ldots$

olduğuna göre, m kaçtır?

4. $\left(x^2-2y\right)^n=\ldots..+mx^{10}y^2+\ldots..$

olduğuna göre, m + n toplamı kaçtır?

5. $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^5$

açılımda x li terimin kat sayısı kaçtır?

6. $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^6$

açılımda x^3 lü terimin kat sayısı kaçtır?

7. $\left(2a-\frac{1}{a^2}\right)^7$

açılımda a lı terimin kat sayısı kaçtır?

8. $\left(x-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^5$

açılımda $\frac{1}{x}$ li terimin kat sayısı kaçtır?

9. $\left(2x^2+\frac{1}{x}\right)^4=...+ax^2+...$

olduğuna göre a kaçtır?

Aklınızda olsun.☺**Sabit terim x^0 lı terimdir.**

Gerçi $(x+2)^3$, $(2x-1)^4$ gibi açılımların sabit terimini bulmak için x e sıfır vermek yeterli. Ama $\left(x+\frac{2}{x}\right)^4$ te olduğu gibi terimlerin birinin paydasında x li ifade varsa o zaman x in üssü sıfır olan terimi bulmak lâzım. x e sıfır verince olmuyor da☺

10. $(x+3)^4$

açılımda sabit terim kaçtır?

11. $P(x)=(x+2)^4-2(x-1)^3$

polinomunun sabit terimi kaçtır?

12. $\left(x+\frac{2}{x}\right)^4$

açılımda sabit terim kaçtır?

13. $\left(\sqrt{x}-\frac{3}{x}\right)^3$

açılımda sabit terim kaçtır?

14. $\left(x^3-\frac{2}{x^2}\right)^5$

açılımda sabit terim kaçtır?

15. $\left(\sqrt{x}+\frac{2}{x^3}\right)^7$

açılımda sabit terim kaçtır?

16. $\left(2x^2-\frac{1}{x^3}\right)^n$

açılımında 6 terim olduğuna göre, bu açılımdaki sabit terimi kaçtır?

OLASILIK

Artık ilköğretim 6. sınıfta bile var olasılık☺
Bunu neden söyleme ihtiyacı duyduğumu anlamışsınızdır. Hem zor değil, hem de önemli bir konu. Ağzındaki süt kokusu gitmeyen çocukların bile bunu anlayabileceğini düşündüklerine göre siz de anlarsınız herhalde.☺
Ama en azından bir piyango bileti aldığınızda büyük ikramiye çıkma olasılığının ya da her konuya zor diyerek önyargılı yaklaşırsanız sınavı kazanma olasılığınızın sıfıra yakın olduğunu hesaplayabilecek kadar öğrenmek lâzım.☺
İlk önce olasılıktaki temel kavramları verelim.
Bu kavramların sorusu olmaz belki. Ama bu kavramlar olmadan da soru olmaz☺

Deney

Olasılıkta, bir madeni paranın yazı - tura için havaya atılması.
Farklı renklerde toplar bulunan bir torbadan bir top çekilmesi,
Tavla oyunun da oynanacak sayıyı belirlemek için bir zarın atılması gibi işlemlerin her birine **deney** denir.

Örneklem Uzay

Bir deneyin mümkün olan tüm sonuçlarının kümesine **örnek(lem) uzay** denir. Bunu kümelerdeki evrensel küme gibi düşünebilirsiniz.
Örnek uzay (mümkün olan tüm durumların kümesi) E ile gösterilir.
Örneğin, bir zarın havaya atılması deneyinde üst yüze gelebilecek sayıların kümesi, yani örnek uzay;
E = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 } olur.
Veya iki madeni paranın havaya atılması deneyinde örnek uzay, E = {(Y,T), (Y,Y), (T,Y), (T,T)} dir.

Olay

Örnek uzayın her bir alt kümesine **olay** denir.
Örneğin, bir zar atılması deneyinde üst yüze
Tek sayı gelme olayı {1, 3, 5 }
4 ten büyük sayı gelme olayı { 5, 6 }
Asal sayı gelme olayı { 2, 3, 5 } olur.
İki madeni parayı havaya attığınızda üst yüze aynı gelme olayı {(Y,Y), (T,T) } olur.

Olasılık sorularını çözerken önemli olan iki şey var. Birincisi mümkün olan tüm durumların sayısı (yani, örnek uzayın eleman sayısı), ikincisi de istenilen durumların sayısı (Yani, bahsedilen olayın eleman sayısı)

Bir olayın eleman sayısını nasıl bulursunuz?
Her seferinde yazmak mı lâzım?
Hayır, tabii ki. Her seferinde değil. Ama bazen yazmak gerekebilir.☺
Bakın bi...
Diyelim ki iki zar atılıyor. Üst yüze gelen sayılar toplamının 9 olma olayı A, 4 olma olayı B olsun.
Burada s(A) ve s(B) yi bulmanın yolu tek tek yazmaktan geçiyor. Maalesef ki bu böyle.☺
A = { (3,6), (4,5), (5,4), (6,3) } ve s (A) = 4 tür.
Ve s(B) = 3 tür.
Yazıp görün isterseniz.☺
Ama diyelim ki bir kutuda 4 mavi, 5 kırmızı kalem var ve siz bu kutudan rastgele iki kalem alıyor olun.
Bu deneyde,
Tüm durumların sayısı $s(E)=\binom{9}{2}=36$ dır.
2 mavi kalem alma olayı A olsun.Bu durumda $s(A)=\binom{4}{2}=6$ dır. (Yani mavilerden ikisini istiyorsunuz.)

Yine bu deneyde 1 mavi, 1 kırmızı kalem alma olayı B olsun. Bu durumda $s(B)=\binom{4}{1}.\binom{5}{1}=20$ olur. (Yani, 1 kırmızı 1 mavi istiyorsunuz.)

İşte bu tür seçim olan sorularda olası durumların ne olduğunu yazmaya gerek yok. Sayısını bulun yeterli.

1. **Havaya bir zar atılması deneyinde üst yüze gelebilecek durumların sayısı (tüm durumların sayısı) kaçtır?**

2. **Bir çift zar atılması deneyinde tüm durumların sayısı (örnek uzayın eleman sayısı) kaçtır?**

3. **2 kız, 3 erkek arasından 2 kişinin seçilmesi deneyinde tüm durumların sayısı kaçtır?**

4. 4 mavi, 3 yeşil bilye bulunan bir kutudan rastgele 2 bilye alınıyor.

Bu deneyde tüm durumların sayısı (örnek uzayın eleman sayısı) kaçtır?

5. Bir madeni para art arda iki kez havaya atılıyor.

Bu deneyde tüm durumların sayısı kaçtır?

6. 1, 2, 3, 4, 5 rakamlarıyla rastgele üç basamaklı sayılar yazılıyor.

Bu deneyde tüm durumların (yazılabilecek tüm sayıların) sayısı kaçtır?

7. Aralarında Ayşe ve Nihal in de bulunduğu 5 arkadaş yan yana sıraya dizilecektir.

Bu deneyde olası tüm durumların (sıralamaların) sayısı kaçtır?

8. 6 elemanlı bir kümenin alt kümeleri arasından biri seçiliyor.

Bu deneyde tüm durumların sayısı kaçtır?

9. **Havaya bir zar atılması deneyinde üst yüze asal sayı gelmesi olayının eleman ayısı kaçtır?**

10. **Bir çift zar atılması deneyinde üst yüze gelen sayılar toplamının 9 dan büyük olması olayının eleman sayısı kaçtır?**

11. **2 kız, 3 erkek arasından 2 erkek seçilmesi olayının eleman sayısı (istenen durumların sayısı) kaçtır?**

12. 4 mavi, 3 yeşil bilye bulunan bir kutudan rastgele 2 bilye alınıyor.

Bu deneyde alınan bilyelerin farklı renkte olması olayının eleman sayısı (istenen durumların sayısı) kaçtır?

1. Bir madeni para art arda iki kez havaya atılıyor.

Üst yüze aynı gelme olayının eleman sayısı kaçtır?

2. 1, 2, 3, 4, 5 rakamlarıyla rastgele üç basamaklı sayılar yazılıyor.

Rakamları farklı bir sayı yazılması olayının eleman sayısı (istenen durumların sayısı) kaçtır?

3. Aralarında Ayşe ve Nihal in de bulunduğu 5 arkadaş yan yana sıraya dizilecektir.

Ayşe ile Nihal in yan yana olması olayının eleman sayısı (istenen durum sayısı) kaçtır?

4. 6 elemanlı bir kümenin alt kümeleri arasından biri seçiliyor.

İki elemanlı bir alt kümenin seçilmesi olayı (istenen durum sayısı) kaçtır?

5. **5 erkek ve 3 kız öğrencinin bulunduğu bir gruptan en az biri kız olan üç kişinin seçilmesi olayının eleman sayısı kaçtır?**

6. **Havaya atılan iki zarın üst yüzlerindeki sayılar toplamının asal sayı olma olayının eleman sayısı kaçtır?**

7. Anne, baba ve 5 çocuktan oluşan bir ailenin bireyleri yuvarlak bir masa etrafında oturacaktır.

Anne ile babanın yan yana oturması olayının eleman sayısı kaçtır?

Bir olayın gerçekleşme olasılığını bulma

Şimdiye kadar anlattıklarımdan şunu öğrendiyseniz bir olayın gerçekleşme olasılığını kolaylıkla bulabileceksiniz.☺

Şunları unutmayın yeter.

Bir deneyde örnek uzayın eleman sayısı, mümkün olan tüm durumların sayısıdır. Ve bir olayın eleman sayısı da istenilen durumların sayısı.

Bir olayın gerçekleşme olasılığını şöyle bulacaksınız; İstenilen durumların sayısını bulun ve bunu tüm durumların sayısına bölün. Bu kadar☺

Eş olumlu uzay da (Ne olduğunu boş verin.☺)

$$\text{Olasılık} = \frac{\text{İstenilen durum sayısı}}{\text{Tüm durumların sayısı}}$$

Bu arada A olayının olasılığı P(A) ile gösterilir.

$P(A) = \dfrac{s(A)}{s(E)}$ olarak ifade edilebilir.

Örnek Soru

Bir kutuda 3 mavi, 4 kırmızı kalem vardır.

Kutudan rastgele alınan iki kalemin farklı renklerde olma olasılığı kaçtır?

Çözelim.☺

Olasılık hesabında iki şey lâzım size.

Biri istenen durum sayısı. Diğeri de olası tüm durumların sayısı.
Önce ne istendiğine bakalım. Farklı renkte iki kalem. Yani, biri mavi diğeri kırmızı iki kalem seçeceksiniz. Bu 3 maviden birinin ve 4 kırmızıdan birinin seçilmesi demek.

Bu seçim $\binom{3}{1}\binom{4}{1} = 12$ farklı şekilde olabilir.

Gelelim tüm durumların sayısına.
Toplam eleman sayısı 7. Ve 2 tanesi seçiliyor.

Bu seçim $\binom{7}{2} = 21$ farklı şekilde olabilir.

Bu ikisini bulduktan sonra birbirine böleceksiniz.
Dolayısıyla istenen olayın olasılığı $\frac{12}{21} = \frac{4}{7}$ dir.

Örnek Soru

Havaya iki zar atılması deneyinde üst yüze gelen sayılar çarpımının tek sayı olma olasılığı kaçtır?

Çözelim.☺
Unutmayın iki şey lazım size.
İstenen durum sayısı ve tüm durumların sayısı.
İstenen durum üste gelen sayılar çarpımının tek olması bu her iki zarın da üst yüzüne tek sayı gelmesiyle mümkün olur. (Öyle değil mi? Sadece tek ile tek i çarpınca tek oluyordu.) Bunun sayısı 3.3 = 9 dur. (Her bir zardan 3 tek sayıdan bir seçilerek bulunuyor)
Tüm durumların ayısı ise 6. 6 = 36 dır.
Bu durumda üste gelen sayıların çarpımının tek olma olasılığı $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ tür.
Anlaşılmayan bir şey var mı?
Bu arada istenilen durumların ve tüm durumların sayısını bulurken permütasyon ve kombinasyon da sıkıntı olmaması lazım geldiğini fark etmişsinizdir.☺

8. **Bir zar atılması deneyinde üst yüze asal sayı gelmesi olasılığı kaçtır?**

9. **İki madeni paranın havaya atılması deneyinde paraların ikisinin de üst yüzüne tura gelme olasılığı kaçtır?**

10. **Bir çift zar atılması deneyinde üst yüze gelen sayılar toplamının 10 olma olasılığı kaçtır?**

11. **Bir çift zar atılması deneyinde üst yüze gelen sayılar toplamının 9 dan büyük olma olasılığı kaçtır?**

12. **2 kız, 3 erkek arasından rastgele seçilen 2 kişinin erkek olma olasılığı kaçtır?**

13. Bir torbada 4 ü çürük toplam 6 elma vardır.
Bu torbadan rastgele alınan bir elmanın sağlam olma olasılığı kaçtır?

1. Bir torbada 4 mavi, 3 kırmızı top vardır.
Bu torbadan rastgele alınan bir topun kırmızı renkli olma olasılığı kaçtır?

2. Mavi ve kırmızı balonların bulunduğu bir torbadaki mavi balonların sayısının kırmızı balonların sayısına oranı $\frac{3}{5}$ tir.
Bu torbadan rastgele seçilen bir balonun kırmızı renkli olma olasılığı kaçtır?

3. 4 mavi, 3 yeşil bilye bulunan bir kutudan rastgele 2 bilye alınıyor.
Alınan bilyelerin farklı renkte olma olasılığı kaçtır?

4. Bir torbada 5 mavi, 4 kırmızı bilye vardır.
Bu torbadan aynı anda iki bilyenin farklı renklerde olma olasılığı kaçtır?

5. Bir torbada 4 ü çürümüş, toplam 7 elma vardır.
Bu torbadan rastgele alınan iki elmadan sadece birinin sağlam olma olasılığı kaçtır?

6. Bir kutuda 4 mavi, 3 kırmızı top vardır.
Bu kutudan aynı anda alınan iki topun kırmızı renkli olma olasılığı kaçtır?

7. Bir kutuda 4 mavi, 3 kırmızı top vardır.
Bu kutudan aynı anda alınan iki topun renklerinin aynı olma olasılığı kaçtır?

8. 5 kırmızı, 4 mavi bilyenin bulunduğu bir torbadan rastgele 3 bilye alınıyor.
Alınan bilyelerin ikisinin mavi birinin kırmızı olma olasılığı kaçtır?

9. 3 mavi, 4 kırmızı, 2 beyaz bilyenin bulunduğu bir torbadan rastgele iki bilye çekiliyor.

İkisinin de mavi olma olasılığı kaçtır?

10. İçinde 5 sağlam 3 bozuk ampul bulunan bir kutudan rastgele üç ampul alınıyor.

Üçünün de sağlam olma olasılığı kaçtır?

11. 5 erkek ve 3 kız öğrencinin bulunduğu bir gruptan 3 kişi seçiliyor.

Seçilenlerden en az birinin kız olma olasılığı kaçtır?

12. Bir torbada 5 mavi, 2 sarı bilye buluna bir torbadan rastgele 5 bilye alınıyor.

Torbada kalan bilyelerin farklı renkte olma olasılığı kaçtır?

13. Bir torbada 3 beyaz, 4 mavi, 2 kırmızı top vardır.

Bu torbadan rastgele 6 bilye alındığında torbada kalan bilyelerin hepsinin farklı renklerde olma olasılığı kaçtır?

14. A = {1, 2, 3, 4} veriliyor.

Buna göre, A×A kümesinin elemanlarından rastgele seçilen bir elemanın (a,a) biçiminde olma olasılığı kaçtır?

15. A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

kümesinin elemanları arasından rastgele seçilen iki elemanın çarpımının tek sayı olma olasılığı kaçtır?

16. A = {– 2 – 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5}

kümesinin elemanları arasından rastgele seçilen iki elemanın toplamının tek sayı olma olasılı kaçtır?

1. A = {– 2 – 1, 0, 1, 2, 3, 4}

kümesinin elemanları arasından rastgele seçilen iki elemanın çarpımının negatif olma olasılığı kaçtır?

2. A = {– 4, – 3, – 2, – 1, 0, 1, 2, 3}

kümesinden seçilen iki sayının çarpımının pozitif olma olasılığı kaçtır?

3. A = {0, 1, 2, 3, 4, 5}

kümesinin elemanları arasından rastgele seçilen iki elemanın toplamının çift olma olasılığı kaçtır?

4. Bir madeni para art arda iki kez havaya atılıyor.

İki atışta da üste aynı yüzün gelme olasılığı kaçtır?

5. 6 elemanlı bir kümenin alt kümeleri arasından biri seçiliyor.

Seçilen alt kümenin 2 elemanlı bir alt küme olma olasılığı kaçtır?

6. Aralarında Ayşe ve Nihal in de bulunduğu 5 arkadaş yan yana sıraya dizilecektir.

Ayşe ile Nihal in yan yana olma olasılığı kaçtır?

7. Birbirinden farklı 3 matematik, 4 fizik kitabı bir rafa rastgele sıralanıyor.

Matematik kitaplarının tamamının yan yana gelmiş olma olasılığı kaçtır?

8. AHMET kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek elde edilen anlamlı yada anlamsız kelimelerden biri seçiliyor.

Seçilen kelimenin A ile başlayan bir kelime olma olasılığı kaçtır?

9. $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$
kümesinin elemanlarıyla yazılan üç basamaklı sayılardan biri seçiliyor.

Seçilen sayının rakamlarının farklı olma olasılığı kaçtır?

10. **113455 sayısının rakamlarının yerleri rastgele değiştirilerek elde edilen bir sayının altı basamaklı bir çift sayı olma olasılığı kaçtır?**

11. Anne, baba ve 5 çocuktan oluşan bir ailenin bireyleri yuvarlak bir masa etrafında oturacaktır.

Anne ile babanın yan yana oturma olasılığı kaçtır?

12. Bir küpün yüzeylerine K, A, M, A, R, A harflerinden birer tanesi yazılmıştır.

Bu küp atıldığında görünen yüzeylerindeki harflerin KARAM kelimesinin harfleri olma olasılığı kaçtır?

13. 1 den 50 ye kadar olan doğal sayılar arasından seçilen bir sayının,

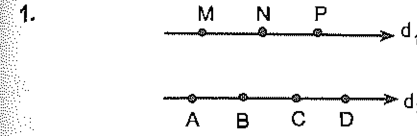
5 ile tam bölünebilen bir sayı olma olasılı kaçtır?

14. **İki basamaklı doğal sayılar arasından rastgele seçilen bir sayının rakamlarının aynı olma olasılığı kaçtır?**

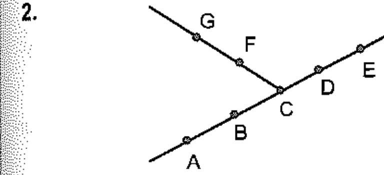
15. **5 evli çift arasından rastgele seçilen bir kadın ve bir erkeğin karı – koca olma olasılığı kaçtır?**

16. 3 çift ayakkabı arasından rastgele iki ayakkabı seçiliyor.

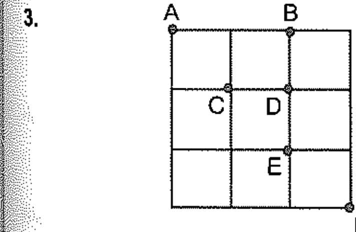
Seçilen iki ayakkabının eş olma olasılığı kaçtır?

1.


$d_1 // d_2$ **olmak üzere, şekilde verilen 7 noktadan rastgele seçilen üç noktanın bir üçgen oluşturma olasılığı kaçtır?**

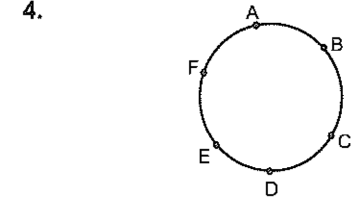
2.


Şekildeki 7 nokta arasından rastgele seçilen üç noktanın üçgen oluşturma olasılığı kaçtır?

3.


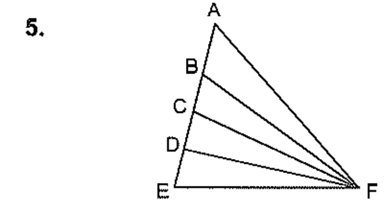
Eş karelerden oluşan şekilde A, B, C, D, E ve F noktaları verilmiştir.

Bu noktalardan rastgele seçilen üç noktanın bir üçgen oluşturma olasılığı kaçtır?

4.


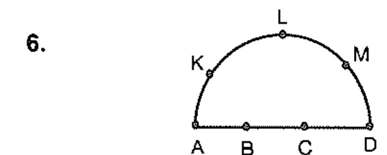
Şekildeki 6 nokta ile çizilebilecek dörtgenlerden biri rastgele seçiliyor.

Seçilen dörtgenin köşelerinden ikisinin A ve E olma olasılığı kaçtır?

5.


Şekildeki üçgenlerden biri rastgele seçiliyor.

Seçilen üçgenin bir köşesinin D olma olasılığı kaçtır?

6.


Köşeleri şekildeki 7 noktadan üçü olan üçgenlerden biri seçiliyor.

Seçilen üçgenin bir köşesinin M olma olasılığı kaçtır?

Bir iki tanım daha var. En azından ne olduklarını bilin. Kültürünüz artsın☺

İmkânsız Olay

Aslında adı üstünde. Gerçekleşme olasılığı olmayan olaydır bu.
Düşünsenize bir zar atıyorsunuz ve üst yüze 7 geliyor. Ya da 5 erkek arasından bir kişi seçiyorsunuz ve kız çıkıyor! ☺
Bu tür olaylara imkânsız olay diyoruz.

Kesin Olay

Bunun da adı üstünde.☺ Gerçekleşmesi kesin olan olaydır bu. Ne gibi derseniz,
Bir zar attığınızda üst yüze gelen sayının 7 den küçük bir doğal sayı olması olayı kesindir.
Ya da 5 kız arasında seçilen bir kişinin kız olması olayı da kesindir. Öyle di mi ama?☺

Anladınız mı şimdi imkânsız ve kesin olan olayların ne demek olduğunu?
Anladıysanız geçelim.

Ayrık olaylar

Aynı anda gerçekleşme olasılığı olmayan olaylardır.
A ve B ayrık iki olay ise $A \cap B \neq \varnothing$ dir.
Aslında ayrık olaylar, bir deneyde farklı iki sonuç aynı anda gelemez mantığına dayanır.

Örneğin,
Bir zar atıyorsunuz ve üst yüze hem 3, hem de 5 aynı anda geliyor. Ne alâka?☺ Bu ikisi ayrıktır işte.
Ayrık olaylar aynı anda gerçekleşemezler.

Ya da 2 kız ve 3 erkeğin olduğu bir gruptan seçilen bir kişinin erkek olma olayı A, kız olma olayı B olsun.
A ve B olayları aynı anda gerçekleşebilir mi?
$A \cap B = \varnothing$ değil midir?
Mesele bu işte.☺
Anladınız mı şimdi?
Şunlar da var tabii ki.☺
$A \cap B = \varnothing$ ise yani, A ve B ayrık ise
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ dir.

Yani, ayrık iki olayın bileşiminin olasılığı her iki olayın olasılıklarının toplamına eşit oluyor.
Ama normalde **$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dir.**

Burada önemli olan $A \cap B$ yi nasıl bulacağınız.☺
Bu arada şunu söylemekte de azim fayda var.
A ve B nin birlikte gerçekleşme olasılığı $P(A \cap B)$, A veya B den en az birinin gerçekleşme olasılığı ise $P(A \cup B)$ ile ifade edilir.

Örnek Soru

Bir torbada 4 mavi, 2 kırmızı ve 3 beyaz bilye vardır.

Bu torbadan rastgele alınan bir bilyenin mavi veya kırmızı olma olasılığı kaçtır?

Çözelim☺
Soru basit aslında.
Ama şunu bilmek lâzım. Alacağınız bir bilye hem mavi hem de kırmızı (yani, **mavi ve(∩) kırmızı**) olacak hali yok. En fazla ikisinden biri olabilir.
Bunun için $P(M \cap K) = 0$ dır.
Alınan bu bilyenin **mavi veya(∪) kırmızı olma** olasılığını $P(M \cup K)$ ile gösterip devam edeyim.
$P(M \cup K) = P(M) + P(K) - P(M \cap K)$ olduğunu biliyorsanız gerisi kolay.
Bilyenin mavi (M) olma olasılığı $\frac{4}{9}$, kırmızı(K) olma olasılığı $\frac{2}{9}$ olduğunu yazabilirseniz (ki artık yazmanız lâzım☺) alınan bilyenin mavi veya kırmızı olma olasılığın $P(M \cup K) = \frac{4}{9} + \frac{2}{9} - 0 = \frac{2}{3}$ olarak bulabilirsiniz.
Geçtim☺

Olasılıkta,
Bir olayın gerçekleşme olasılığı ile gerçekleşmeme olasılığının toplamı 1 e eşittir.
Yani, $P(A) + P(A') = P(E) = 1$ dir.

Meselâ, bir penaltının gol olma olasılığı $\frac{2}{3}$ ise gol olmama olasılığı $\frac{1}{3}$ tür. (Bir olayın gerçekleşme ve gerçekleşmeme olasılığı toplamı her zaman 1 e eşittir.)

Son olarak da şuna bakın. Olur ya belki lâzım olur☺

Bir örnek uzay sadece A, B ve C olaylarından oluşmuşsa $P(A) + P(B) + P(C) = 1$ dir.

1. Bir avcının hedefini vurma olasılığı $\frac{3}{5}$ tir.
   Buna göre, hedefini vuramama olasılığı kaçtır?

2. **Rana nın girdiği bir sınavda başarılı olma olasılığı $\frac{3}{4}$ olduğuna göre, başarısız olma olasılığı kaçtır?**

3. **Aynı anda atılan üç madeni paranın en az birinin üst yüzüne yazı gelme olasılığı kaçtır?**

4. 4 erkek, 3 kız arasından rastgele 3 kişi seçiliyor.
   Seçilen 3 kişiden en az birinin erkek olma olasılığı kaçtır?

5. Bir koşuya katılan A, B ve C isimli üç yarışmacıdan A nın yarışmayı birinci bitirme olasılığı B nin iki katı C nin yarısı kadardır.
   Bu yarışmayı B nin birinci olarak bitirme olasılığı kaçtır?

Koşullu (Şartlı) Olasılık

Bunun orijinal tanımını geçiyorum. Anlayacağınız şekilde tanımlayayım☺
Koşullu olasılıktan kasıt. **Gerçekleştiği bilinen durumlar içindeki istenen durumların (olayın) olasılığıdır.**
Koşullu olasılık soruları normal olasılık sorularından bile daha kolaydır çoğu kez.
Eğer soruda, şöyle şöyle **olduğu bilindiğine göre....**diyorsa bu koşullu olasılık sorusudur. Koşullu olasılık sorularında tüm durumların sayısı gerçekleşen durumların sayısıdır. Yani, gerçekleşen durum örnek uzay olarak kabul edilir.
İstenen durumların sayısını ise gerçekleşen durumların arasından buluyoruz.

Örnek Soru

2 kırmızı, 3 mavi bilye bulunan kutudan rastgele 2 bilye alınıyor.

Alınan bilyelerin aynı renkli olduğu bilindiğine göre, mavi renkli olma olasılığı kaçtır?

Çözelim.☺
Bilinen durum nedir?
Ve bilinen bu durumların içinden bize hangileri lâzım?
İlk önce bunları netleştirin.
Bilinen durum ikisinin de aynı renkte olduğu. O halde bakalım ki aynı renk iki bilye kaç farklı şekilde seçilebiliyor?
Ya 2 kırmızı ya da 2 mavi olduğu biliniyor.
$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} = 1 + 3 = 4$ farklı seçimden birinin gerçekleştiğini biliyoruz.
İstenen ise bu durumlar içinde ikisinin de mavi renkli olması durumu.
2 mavi bilye yi $\binom{3}{2} = 3$ farklı şekilde seçebiliriz.
Bu durumda bizden istenen olasılık
$\frac{\text{istenen durum sayısı}}{\text{gerçekleşen durum sayısı}} = \frac{3}{4}$ olarak bulunur.
Kısacası koşullu olasılık sorularında istenen durum sayısını gerçekleşen durum sayısına böleceksiniz.

6. Bir zar atılıyor.

Üst yüze gelen sayının asal sayı olduğu bilindiğine göre, tek olma olasılığı kaçtır?

7. 6 sı mavi gözlü olmak üzere 12 erkek ve 3 ü mavi gözlü olmak üzere 9 kız öğrencinin bulunduğu gruptan bir öğrenci seçiliyor.

Seçilen öğrencinin mavi gözlü olduğu bilindiğine göre, kız öğrenci olma olasılığı kaçtır?

8. 40 kişilik bir sınıfta 15 kız vardır. Kızlardan 7 si erkeklerin ise 13 ü gözlüklüdür.

Rastgele seçilen bir öğrencinin erkek olduğu bilindiğine göre gözlüklü olma olasılığı kaçtır?

9. Bir torbada 5 mavi, 3 sarı ve 2 kırmızı top vardır.

Bu torbadan çekilen iki topun aynı renkli olduğu bilindiğine göre, ikisinin de sarı olma olasılığı kaçtır?

10. A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

kümesinin elemanlarından iki tanesi rastgele seçiliyor.

Seçilen iki elemanın çarpımının tek olduğu bilindiğine göre, çarpımlarının asal olma olasılığı kaçtır?

11. **Havaya atılan iki zardan birinin 2 geldiği bilindiğine göre toplamlarının 6 dan büyük olma olasılığı kaçtır?**

12. A = {– 2 – 1, 1, 2, 3, 4}

kümesinin elemanlarından rastgele seçilen iki elemanın çarpımının pozitif olduğu bilindiğine göre, toplamlarının negatif olma olasılığı kaçtır?

13. Bir topluluğun % 40 ı bayan % 60 ı erkektir. Erkeklerin % 30 u, bayanların ise % 40 ı mavi gözlüdür.

Bu topluluktan rastgele seçilen bir kişinin mavi gözlü olduğu bilindiğine göre, erkek olma olasılığı kaçtır?

Bağımsız Olaylar

İki olaydan birinin gerçekleşmesi diğerinin gerçekleşmesini etkilemiyorsa bu olaylar bağımsızdır. Yani, sonuçları itibariyle birbirleriyle alâkaları yoktur.

Örneğin, bir madeni para ve zarın aynı anda atıldığını (aynı anda atmasanız da fark etmez gerçi☺) düşünelim. Bu iki deneyin sonucu birbirinden bağımsız değil midir? Yani, paranın tura gelmesi zarı etkiler mi?

Ya da mavi ve sarı bilyelerin bulunduğu farklı iki torbanın birincisinden alınan bilyenin renginin ikincisinden alınanın rengine ne gibi bir etkisi olabilir ki?

İşte... Bağımsız olay meselesi bu.

Anladınız mı?

Eğer bağımlı olayı da merak ediyorsanız size komik bir tanım yapayım.☺

İki olay bağımsız değilse bu olaylara **bağımlı olaylar** denir. Ama iki olay bağımlı mı, bağımsız mı? Bunu sadece mantığınızı devreye sokarak anlayabilirsiniz. Anlayacağınız ezber yok burada...

Birbirinden bağımsız iki olayın ikisinin de gerçekleşme olasılığı olasılıklarının çarpımına eşittir.

A ve B olayları birbirinden bağımsız ise A ve B nin gerçekleşme olasılığı = $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

Bir de şunları unutmamanız lâzım

A ve B nin gerçekleşme olasılığı $P(A \cap B)$,

A veya B nin gerçekleşme olasılığı $P(A \cup B)$ ile ifade ediliyordu.

Örnek Soru

İki torbadan birincisinde 3 mavi, 2 kırmızı, ikincisinde 4 mavi, 3 kırmızı bilye vardır. İki torbadan rastgele birer bilye alınıyor.

Alınan bilyelerin mavi renkli olma olasılığı kaçtır?

Çözelim☺

İlk önce şuna karar vermek lâzım. Burada iki farklı iş(deney) yapılıyor. Ve birinin sonucu ne olursa olsun diğerine bir etkisi olmaz. Yani, bu iki olay birbirinden bağımsız.

Bağımsız iki olayın birlikte gerçekleşme olasılığı ikisinin olasılıkları çarpımıydı.

Birinciden alınan bilyenin mavi olma olasılığı $\frac{3}{5}$, ikinciden alınanın ise $\frac{4}{7}$ dir.

İkisinin de mavi olma olasılığı ise $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{12}{35}$ tir.

Anlaşılmış olması lâzım☺

1. Madeni bir para ile bir zar atılıyor.

Paranın üst yüzüne tura, zarın üst yüzüne asal sayı gelme olasılığı kaçtır?

2. İki zar aynı anda havaya atılıyor.

Üst yüze gelen sayılar çarpımının tek sayı olma olasılığı kaçtır?

3. Bir zar art arda iki kez atılıyor.

Birinci atışta asal sayı, ikinci atışta 4 ten büyük sayı gelme olasılığı kaçtır?

4. Bir zar ve üç madeni para havaya atılıyor.

Zarın çift asal sayı ve paralarında hepsinin yazı gelme olasılığı kaçtır?

5. İki torbadan birincisinde 4 mavi 3 sarı bilye, ikincisinde 2 mavi 5 sarı bilye vardır. Her iki torbadan rastgele birer bilye seçiliyor.

Seçilen bilyelerin mavi renkli olma olasılığı kaçtır?

6. Bir sınavı Sevim'in kazanma olasılığı $\frac{2}{3}$, Nihal'in kazanma olasılığı $\frac{1}{2}$dir.

Bu iki olay birbirinden bağımsız olduğuna göre, bu sınavı ikisinin de kazanma olasılığı kaçtır?

7. Bir hedefi Ayla nın vurabilme olasılığı $\frac{1}{4}$, Leyla nın vurabilme olasılığı $\frac{1}{3}$ tür.

Sadece birer atış yaptıklarında hedefin her iki atıcı tarafından da vurulma olasılığı kaçtır?

8. Bir sınavı Ayşe'nin kazanma olasılığı $\frac{3}{4}$, Berra'nın kazanma olasılığı $\frac{2}{3}$ tür.

Bu iki olay birbirinden bağımsız olduğuna göre, bu sınavı ikisinden sadece birinin kazanma olasılığı kaçtır?

9. Bir torbada 3 beyaz 4 kırmızı top vardır. Ali elindeki zarı atıyor ve sonra bu torbadan rastgele bir top çekiyor.

Buna göre, zarın 4 ten büyük ve topun kırmızı olma olasılığı kaçtır?

A veya B nin gerçekleşme olasılığı...

A nın veya B nin gerçekleşme olasılığı $P(A \cup B)$ şeklinde ifade ediliyor. Ve kümelerdekine benzer biçimde **$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dir.**

Örnek Soru

Bir madeni para ve zar birlikte atılıyor.

Paranın üst yüzüne tura veya zarın üst yüzüne 4 ten büyük sayı gelme olasılığı kaçtır?

Çözelim.☺

"Şunun **veya** şunun olasılığı kaçtır?" gibi sorularda dikkatli olun. Yamulma olasılığı mevcut da.☺

Bu tip sorularda en önemli husus $P(A \cap B)$ yi doğru hesaplamak.

Bunun için A ve B nin ayrık iki olay mı? Bağımsız iki olay mı? Veya bağımlı iki olay mı? olduğuna doğru karar vermeniz lâzım.

Buradaki iki olay birbirinden bağımsızdır. (Öyle değil mi?)

Üste tura gelme olayına A, zarın 4 ten büyük gelme olayına da B diyelim.

$P(A) = \frac{1}{2}$ ve $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ü bulun ilk önce. A ve B bağımsız iki olay olduğundan

$P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{1}{2}.\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ dır.

Şimdi hesaplayabilirsiniz $P(A \cup B)$ yi.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ de bulduğunuz değerleri yerine yazarsanız. $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$ bulursunuz.

1. Bir madeni para ve zar birlikte atılıyor.

Paranın üst yüzüne yazı veya zarın üst yüzüne asal sayı gelme olasılığı kaçtır?

2. Bir madeni para ve zar birlikte atılıyor.

Paranın üst yüzüne tura veya zarın üst yüzüne 5 gelme olasılığı kaçtır?

3. Bir torbada 3 beyaz 4 kırmızı top vardır. Ali elindeki zarı atıyor ve sonra torbadan bir top çekiyor.

Buna göre zarın 4 ten büyük veya topunda kırmızı olma olasılığı kaçtır?

4. İki torbadan birincisinde 4 mavi 3 sarı bilye, ikincisinde 2 mavi 5 sarı bilye vardır. Her iki torbadan rastgele birer bilye seçiliyor.

Birinci torbadan alınan bilyenin mavi veya ikinciden alınan bilyenin sarı renkli olma olasılığı kaçtır?

Ardışık deneyler...

Bir sonuca ulaşmak için birbirinden bağımsız veya bağımlı ardışık iki veya daha fazla deney yapmanız gerekiyorsa bu sonucun gerçekleşme olasılığını her bir deneydeki istenilen durumların olasılığını çarparak bulacaksınız.

Ne gibi derseniz?

Meselâ bir zar atıp torbadan top çekme,

Bir torbadan art arda bilye çekme,

Bir torbadan bilye çekip diğerine atma ve sonra diğerinden bilye çekme deneyinde sonuca giderken olasılıklar çarpılarak gidilir.

Örnek vereyim isterseniz.

Örnek Soru

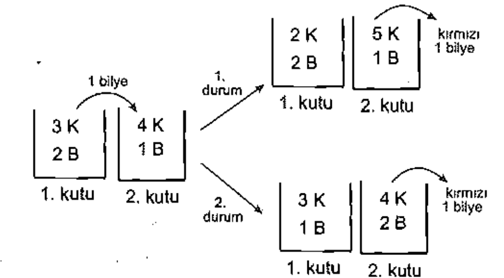
İki kutudan birincisinde 3 kırmızı, 2 beyaz, ikincisinde 4 kırmızı, 1 beyaz bilye vardır. Birinci kutudan rastgele bir bilye alınarak ikinciye atılıyor. Daha sonra ikinci kutudan rastgele bir bilye çekiliyor.

İkinci kutudan çekilen bilyenin kırmızı renkli olma olasılığı kaçtır?

Çözelim☺

Birinci kutudan rastgele bir bilye çekin ve ikinciye atın. Sonra da ikinciden bir bilye çekin. Ama ikinciden çektiğiniz kırmızı olsun. İşte bunun olasılığını bulacaksınız.

İlk önce olası durumları düşünün. Birinciden çektiğiniz bilyenin rengi kırmızı da olabilir beyaz da. Ama ikinciden alınan kesinlikle kırmızı olmalı. (İstenen durum bu)



Yani iki olası durum var.

Birinci olası durum şu: Birinciden kırmızı çekip ikinciye atmış olabiliriz. Bu durumda ikicide 5 kırmızı 1 beyaz bilye olur. Şimdi ikinciden kırmızı bilye çekmek istersek bunun olasılığı birinciden kırmızı çekme olasılığı çarpı ikinciden kırmızı çekme olasılığı olur. Yani, $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{30}$ olur.

Gelelim ikinci olası duruma.

İkinci olası durum ise birinciden beyaz çekmiş ve ikinciye atmış olabiliriz. Bu durumda ikincide 4 kırmızı, 2 beyaz bilye olur.
Bu durumda ikinciden kırmızı çekme olasılığı

$\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{6} = \frac{8}{30}$ olur.

İstenen durumun gerçekleşme olasılığı yani, ikinciden kırmızı bilye çekme olasılığı $\frac{15}{30} + \frac{8}{30} = \frac{23}{30}$ olur.

Aklınıza başka bir olasılık geliyor mu? Gelmiyorsa olay bitmiştir. Geliyorsa devam...☺
Bu tür sorularda aklınıza gelen tüm olasılıkları bulun ve toplayın.

Örnek Soru

3 mavi, 2 kırmızı balonun bulunduğu bir torbadan geri konulmamak şartıyla art arda iki balon alınıyor.

Alınan balonların aynı renkli olma olasılığı kaçtır?

Çözelim☺
İlk şunu düşünün. İstenen sonuca nasıl ulaşabilirsiniz? Yani, aklınıza hangi olasılıklar geliyor? Bu bir.
Ve ilk aldığınız balonun rengi ne olabilir?
Kırmızı ya da mavi.
Öyle değil mi?
Peki, diyelim ki kırmızı almış olun. (Bu durumda torbadaki kırmızı balonlar 1 eksilmiş oluyor.) O zaman ikincisi de kırmızı olması lâzım.
İşte bu durumda art arda iki kırmızı alma olasılığı birincinin kırmızı olma olasılığı olan $\frac{2}{5}$ (5 balonun 2 si kırmızı) ile ikincinin kırmızı olma olasılığı olan $\frac{1}{4}$ ün (Artık 4 balon var. Ve sadece 1 i kırmızı) çarpımı olur.

Yani, $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{10}$ olur.

Ama ilk alınan balon mavi de olabilir tabii ki.
Bu durumda ikincisinin de mavi olması gerek.
Birincinin mavi ve ikincinin de mavi olma olasılığı ise

$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{10}$ olur.

Şimdi şu soruyu tekrar sorun kendinize.
Bizden ne istiyordu?
İkisinin de aynı renkli olmasını.
Yani, ya kırmızı kırmızı (KK) ya da mavi mavi (MM).
İstenen olasılığın değeri bu ikisinin olasılıklarının toplamı olacaktır.

Bu da $P(KK) + P(MM) = \frac{2}{10} + \frac{6}{10} = \frac{4}{5}$ tir.

Peki, ne zaman çarpıp ne zaman toplayacaksınız?
Kafanızda oluşan bi şey var mı?☺
Bunu için kendinize şu soruyu sorun. İstenilen sonuç nasıl gerçekleşir?
"Şöyle olursa olur ya da şöyle olursa...." diyorsanız şöyle olursa... dediğiniz her bir olasılığı bulun ve bunları toplayın.
Ama şöyle olursa... dediğiniz durumların gerçekleşmesi için ardışık iki veya daha çok deney yapıyorsanız çarparsınız.
Az önceki örnekleri bir de bu söylediklerimi ışığında inceleyin isterseniz.
Faydası olabilir. ☺

5. Bir zar atılıyor ve içinde 3 mavi 2 kırmızı balon buluna torbadan rastgele bir balon alınıyor.

Atılan zarın 4 ten büyük ve balonun mavi renkli olma olasılığı kaçtır?

6. Bir zarın bir yüzü beyaz, iki yüzü kırmızı ve üç yüzü mavidir. Bu zar arka arkaya üç kez atılıyor.

Birinci atışta beyaz diğerlerinde mavi gelme olasılığı kaçtır?

7. İki kutudan birincisinde 2 mavi, 3 beyaz, ikincisinde 1 mavi, 2 beyaz bilye vardır. Birinci kutudan rastgele bir bilye alınarak ikinciye atılıyor. Daha sonra ikinci kutudan rastgele bir bilye çekiliyor.

İkinci kutudan çekilen bilyenin mavi renkli olma olasılığı kaçtır?

1. İki kutudan birincisinde 2 mavi, 3 beyaz, ikincisinde 1 mavi, 2 beyaz bilye vardır. Birinci kutudan rastgele bir bilye alınarak ikinciye atılıyor. Daha sonra ikinci kutudan rastgele bir bilye çekiliyor.

İkinci kutudan çekilen bilyenin birinci kutudan çekilen ile aynı renkli olma olasılığı kaçtır?

2. İki torbadan birincisinde 3 kırmızı 4 mavi, ikincisinde 4 kırmızı 2 mavi bilye vardır.
Önce birinci torbadan rastgele bir bilye seçilerek ikinci torbaya atılıyor. Sonra da ikinci torbadan rastgele bir bilye seçilerek birinci torbaya atılıyor.

Renk bakımından ilk durumu elde etme olasılığı kaçtır?

3. İki torbadan birincisinde 4 yeşil, 5 sarı, ikincisinde 3 yeşil, 4 sarı balon vardır. Birinci torbadan rastgele bir balon alınarak ikinciye atılıyor. Daha sonra ikinci torbadan rastgele bir balon alınıyor.

İkinci torbadan alınan balonun birinci torbadan alınan ile farklı renkte olma olasılığı kaçtır?

Bir torbadan geri konulmamak şartıyla bilye çekme...

4. Bir torbada 2 beyaz, 3 mavi balon vardır.Bu torbadan geri <u>konulmamak</u> üzere art arda iki balon alınıyor.

Alınan balonların ikisinin de mavi olma olasılığı kaçtır?

5. Bir torbada 3 sarı, 5 kırmızı balon vardır. Bu torbadan geri <u>konulmamak</u> üzere art arda iki balon alınıyor.

Birincisinin sarı ikincisinin kırmızı renkli olma olasılığı kaçtır?

6. Bir torbada 2 kırmızı, 1 mavi, 4 bordo bilye vardır.

Bu torbadan geri konulmamak şartıyla arka arkaya alınan üç bilyenin bordo renkli olma olasılığı kaçtır?

7. Mavi ve kırmızı bilyelerin bulunduğu bir torbadaki mavi bilye sayısı kırmızı bilye sayısının 2 katıdır.

Torbadan art arda geri konulmamak şartıyla alınan iki bilyeden birincinin mavi, ikincinin kırmızı olma olasılığı $\frac{4}{17}$ olduğuna göre, başlangıçtaki mavi bilye sayısı kaçtır?

8. İki torbadan birincisinde 2 mavi 4 beyaz, ikincisinde ise 3 mavi 1 beyaz bilye vardır. Torbalardan biri rastgele seçilerek bu torbadan bir bilye çekiliyor.

Birinci torbadan mavi bilye çekilmiş olma olasılığı kaçtır?

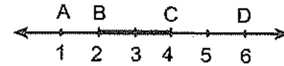
9. İki torbadan birincisinde 3 mavi 2 kırmızı, ikincisinde ise 2 mavi 3 kırmızı bilye vardır. Bir zar atılıyor ve zar 3 ten büyük gelirse birinci torbadan, 3 ten küçük gelirse ikinci torbadan bir bilye çekiliyor.

İkinci torbadan kırmızı bilye çekilmiş olma olasılığı kaçtır?

Bazen eleman sayısını sayamazsınız.
Ama problem değil. İstenen olasılığı, istenen uzunluğu tüm uzunluğa veya istenen alanı tüm alana veya zaman aralığını tüm zamana bölerek bulabilirsiniz.

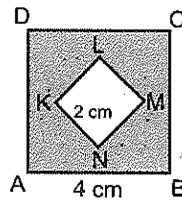
10. Saat 12:00 da A kentinden B kentine doğru yola çıkan bir hareketli en erken 12:20 da en geç 12:32 de B kentine vardığına göre, 12:24 ten sonra varma olasılığı kaçtır?

11.



Şekildeki doğru üzerinde işaretlenen bir noktanın [AD] üzerinde olduğu bilindiğine göre, [BC] üzerinde olma olasılığı kaçtır?

12.



Şekildeki ABCD karesinin bir kenarı 4 cm, KLMN karesinin bir kenarı ise 2 cm dir.

Buna göre, ABCD karesi içinde seçilen bir noktanın KLMN karesi dışında olma olasılığı kaçtır?

Matrisler ve Determinant

Yapabileceğinize de inanşanız, haklı çıkarsınız.

Henry Ford

MATRİSLER

Çok kolay öğrenebileceğiniz bir konu.
Ama hiç çalışmayanlar için kolay konu yok tabii ki☺
Matris, satır ve sütunlardan oluşan bir tablo. Ama aynen reel sayılardaki gibi burada da toplama, çıkarma, çarpma, tersini bulma gibi şeyler var.
Başlarken bir iki matris yazarak merakınızı giderip öyle devam edeyim.
Meselâ 2 satır ve 3 sütundan oluşan bir A matrisi yazayım.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

Bir de 3 satır ve 2 sütundan oluşan bir B matrisi.

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

Matris, üstte gösterdiğim gibi sayılardan oluşan böyle bir tablo işte.
Ama tablodaki (matristeki) her elemanın yerini gösteren bir adresi var.
Örneğin,
A matrisinin 2. satırı ve 3. sütununun kesiştiği yerdeki eleman a_{23} ile,
1. satırı ile 2. sütununun kesiştiği yerdeki eleman a_{12} ile gösterilir.
Bu söylediklerimi daha genel ifade edeyim. m tane satır ve n tane sütundan oluşan bir A matrisi

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Biçiminde gösterilir. Ve bu matrise m × n türünde (m × n boyutlu) bir matris denir.

Burada, m satır sayısı n ise sütün sayısıdır.
a_{ij} elemanı i. satır ve j. sütünün kesişimindeki eleman demektir. (o elemanın adresi diye düşünebilirsiniz bunu)

Örnek Soru

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $a_{12}+a_{31}$ toplamı kaçtır?

Çözelim.☺
Çözmeye bile gerek yok bence.☺
Her şey verilmiş zaten. Sadece bakmak ve görmek lâzım☺
a_{12}; birinci satır ile ikinci sütunun kesiştiği yerdeki eleman demektir.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

1. satır
2. satır
3. satır
2. sütun

Yani, $a_{12}=3$ tür.
Aynı şekilde a_{31}; üçüncü satır ile birinci sütunun kesiştiği yerdeki eleman demektir. Yani, $a_{31}=1$ dir.
Demek ki $a_{12}+a_{31}=3+1=4$ imiş.

1. $$A=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

olduğuna göre, $a_{32}+a_{12}\cdot a_{21}$ işleminin sonucu kaçtır?

2. $$A=\begin{bmatrix} 3 & 8 & -2 \\ 4 & 5 & -4 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

olduğuna göre, $a_{21}+a_{13}+a_{23}$ toplamının sonucu kaçtır?

3. $B = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & -9 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, $b_{21} \cdot b_{32}$ çarpımının sonucu kaçtır?

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 & 1 \\ 3 & -3 & 9 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & -1 \\ -5 & 6 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, $a_{11} + a_{32} \cdot a_{41}$ işleminin sonucu kaçtır?

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ x & -2 & 0 \end{bmatrix}$

matrisinde $a_{13} + 3.a_{21} - a_{23} = 4$ olduğuna göre, x kaçtır?

6. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & x \\ x & -2 & y \\ 5 & 1 & -5 \end{bmatrix}$

matrisinde $a_{13} - a_{21} + a_{23} + a_{32} + a_{33} = 0$ olduğuna göre, y kaçtır?

✓ Bütün elemanları sıfır olan matrise **sıfır matrisi** denir. O ile gösterilir.

Örneğin, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ birer sıfır matrisidir.

✓ Satır ve sütün sayıları eşit olan matrise **kare matris** denir.

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Bu matriste a_{11}, a_{22}, a_{33} elemanları **esas köşegen** üzerindeki elemanlardır.

✓ Esas (asal) köşegen elemanları 1, diğer bütün elemanları 0 "sıfır" olan kare matrise **birim matris** denir ve I ile gösterilir.

$I_1 = [1]$

$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Şu da lâzım olacak. Aklınızda ola☺
Birim matrisin tüm kuvvetleri de yine birim matristir.

Bir Matrisin Transpozesi (Devriği)

Bir matrisin satırlarının sütun, sütunlarının da satır haline getirilmesiyle elde edilen matrise bu matrisin transpozesi (devriği) denir. Ve A^T veya A^d ile gösterilir.

Örneğin , $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ise $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ dir.

Yani, bir matrisin transpozesini bulurken birinci satır birinci sütun oluyor. İkinci satır da ikinci sütun...

İlerde daha detaylı bahsetcez. Ama şimdilik bu kadarını ve bir iki özelliğini bilin yeterli.☺

- $(A^T)^T = A$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$

1. A, bir sıfır matrisidir.

$A = \begin{bmatrix} x-1 & 0 \\ 0 & y+2 \\ z-5 & 0 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, x + y + z toplamı kaçtır?

2. A, bir sıfır matrisidir.

$A = \begin{bmatrix} x-1 & y-2 \\ t-4 & z-3 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, x + y + z + t toplamı kaçtır?

3. A, bir kare matristir.

$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, A matrisinin esas köşegen elemanlarının toplamı kaçtır?

4. A, bir kare matristir.

$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Buna göre A matrisinin esas köşegen elemanlarının toplamı kaçtır?

5. I_1, birim matristir.

$I_1 = [3a - 14]_{1 \times 1}$

olduğuna göre, a kaçtır?

6. I_2 , birim matristir.

$I_2 = \begin{bmatrix} x-3 & 0 \\ 0 & y-2 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, x + y toplamı kaçtır?

7. I_3 , birim matristir.

$$I_3 = \begin{bmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 0 & b-4 & 0 \\ 0 & d-1 & c+2 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, a.b – c.d işleminin sonucu kaçtır?

8. Aşağıdaki matrislerin transpozesini bulunuz.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

İki matrisin eşitliği

Matrislerdeki en önemli yerlerden biri bu. Ve çok basit.☺
Boyutları aynı ve karşılıklı elemanları eşit olan matrisler eşittir. Kısacası adresi aynı olan elemanların eşit olması lâzım.

9. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, a + d toplamı kaçtır?

10. $\begin{bmatrix} 2x+3 & -5 \\ y-2 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, x + y + z toplamı kaçtır?

11. $\begin{bmatrix} x-1 & 3 \\ y+1 & z-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, x + y + z toplamı kaçtır?

12. $A = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -3 & b-3 & 0 \\ 3 & a+2 & 2 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} c+5 & -5 & -1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & d-2 \end{bmatrix}$

A = B olduğuna göre, a.b.c.d çarpımı kaçtır?

1. $\begin{bmatrix} 2 & x+1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ y+2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, x.y çarpımı kaçtır?

2. $\begin{bmatrix} 2x & -2 \\ 3y+1 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & t-2 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, x + y + z + t toplamı kaçtır?

3. $\begin{bmatrix} |x-2| & 5 \\ y^3 & 3^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 27 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, x + y + z toplamı en az kaçtır?

4. $\begin{bmatrix} -1 & 5 & a \\ b+3 & c-2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2a+b \\ 6 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, a.c çarpımı kaçtır?

5. $A = \begin{bmatrix} 3 & x \\ 4 & 2^a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{y} \\ y & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

olmak üzere, A = B olduğuna göre, a.x çarpımı kaçtır?

6. $A = \begin{bmatrix} 2a+3 & d+1 \\ b & c-2 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

$A = B^T$ **olduğuna göre, a + b + c + d toplamı kaçtır?**

7. $A=\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$

$B=\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -y+6 & 1 \end{bmatrix}$

$A = B^T$ olduğuna göre, x + y + z + t toplamı kaçtır?

8. $A=\begin{bmatrix} a+1 & b+2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

$B^T=\begin{bmatrix} -3 & c+5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

A = B olduğuna göre, a + b + c toplamı kaçtır?

9. $X=\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -5 \\ -5 & a-b \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

$Y=\begin{bmatrix} a+b & 3 & -5 & 1 \\ 6 & -5 & 7 & c \end{bmatrix}$

$X = Y^T$ olduğuna göre, a.b.c çarpımı kaçtır?

Matrislerde toplama- çıkarma işlemi

A ve B aynı boyutlu değilse toplama filan yapılmaz zaten. Genel olarak A ve B matrislerini toplarken A ve B matrislerinin aynı adresli elemanları toplanır. Başka da bir şeyi yok☺
Çıkarırken de aynı mantıkla işlem yapılır.
Şunu inceleyin bakalım.

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3+5 & -2-4 \\ 2-1 & 4+3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Şimdi anladınız mı ne demek istediğimi?

10. $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, A + B matrisi nedir?

11. $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ a & b \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} x & y \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ olmak üzere,

$A-B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, a.b – x.y işleminin sonucu kaçtır?

Bir Matrisi Bir Sayı ile Çarpma

Bir matrisi bir sayı ile çarparken o matrisin bütün elemanları o sayı ile tek tek çarpılır. Biraz uzun gibi. Ama başka yolu da yok benim bildiğim.☺
Demek istediğim şeyi şöyle örneklendireyim.

$$2\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2.3 & 2.1 \\ 2.(-2) & 2.5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -4 & 10 \end{bmatrix}$$

Başka örneğe gerek yok di mi?

1. $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, 2.A matrisini bulunuz.

2. $X=\begin{bmatrix} -15 & -6 \\ 0 & 12 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, $\frac{-1}{3}\cdot X$ matrisini bulunuz.

3. $A=\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$

$B=\begin{bmatrix} x-1 & 3 \\ -3 & y+2 \end{bmatrix}$

3A = B olduğuna göre, x + y toplamı kaçtır?

4. $\begin{bmatrix} x+1 & -5 & 3 \\ -2 & y+1 & -1 \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 8 & -10 & 6 \\ -4 & -6 & -2 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, x.y çarpımı kaçtır?

5. $3\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

işleminin sonucu nedir?

6. $3\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

işleminin sonucu nedir?

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, $3A^T + B$ toplamının sonucu nedir?

8. x, y, z birer pozitif tam sayı olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} x+1 & 1 \\ 2 & y^2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ z-3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 18 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, x + y + z toplamı kaçtır?

9. $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

işleminin sonucu nedir?

10. $A = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, 2A – 3B farkı neye eşittir?

11. $x\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, x.y çarpımı kaçtır?

12. $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & -5 & 6 \\ 10 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, $A - 3B^T$ işleminin sonucu nedir?

1. I birim matris ve

$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$B = 3A + 2I$

olduğuna göre, B matrisinin eşiti nedir?

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$B = 4A^T + 3I$

olduğuna göre, B matrisinin eşiti nedir?

3. $2\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-2 & 3^{z-1} \\ y+3 & t+2 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, x + y + z + t toplamı kaçtır?

4. $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$3A - 2B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, A matrisinin eşiti nedir?

5. $A + B = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix}$

$A - B = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, B matrisi nedir?

6. $A + 2B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

$2A - B = \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, A matrisinin eşiti nedir?

Matrislerde Çarpma İşlemi

Ben hiçbir şey anlatmadan siz önce aşağıda A.B çarpım matrisini nasıl bulduğumu inceleyin bakalım.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} 2.3+3.2+0.2 & 2.1+3.0+0.2 \\ (-1).3+4.2+3.1 & (-1).1+4.0+3.2 \end{matrix}$$

Anladınız mı ne yaptığımı?
Anlamayanlar için izah edeyim.
A.B çarpımı bulunurken,
A nın birinci satırı ile B nin birinci sütununun elemanları çarpılıp toplanarak çarpımın birinci satır birinci sütun elemanı bulunur.
A nın birinci satırı ile B nin ikinci sütununun elemanları çarpılıp toplanarak çarpımın birinci satır ikinci sütun elemanı bulunur.
Böyle devam ediyor işte. Yazması biraz uzun da.☺
İki matrisin çarpılabilmesinin de bir şartı var tabii ki.
A.B işleminin yapılabilmesi için A nın sütun sayısı ile B nin satır sayısı eşit olmalı.

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

$c_{23} \in A.B$ ise, bu eleman A matrisinin 2. satırı ile B matrisinin 3. sütununun elemanlarının karşılıklı çarpımlarının toplamından elde edilmiştir.

Tabii bunda biraz amelelik var ama olsun... Sizin de başka işiniz olmadığına göre...☺

7. $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, A.B çarpımının sonucu nedir?

8. $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, A.B çarpımının sonucu nedir?

9. $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, A.B çarpımının sonucu nedir?

10. $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, A.B çarpımının sonucu nedir?

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, A.B matrisinin eşiti nedir?

2. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

olduğuna göre, a + b + c + d toplamı kaçtır?

3. $\begin{bmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 9 \\ -8 & -7 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, x + y toplamı kaçtır?

4. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} . & . & . \\ a & . & . \\ . & b & . \end{bmatrix}$

olduğuna göre, a + b toplamı kaçtır?

5. $\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & . & . \\ . & b & . \\ d & . & c \end{bmatrix}$

olduğuna göre, a.b + c.d toplamı kaçtır?

6. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ x & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 16 \\ 8 & 9 & 28 \\ 8 & x+12 & 40 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, x kaçtır?

7. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & \cdot & \cdot \\ \cdot & n & \cdot \\ \cdot & \cdot & p \end{bmatrix}$

olduğuna göre, m + n + p toplamı kaçtır?

8. $\begin{bmatrix} 2 & x & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, x kaçtır?

9. $\begin{bmatrix} 1 & a & 4 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 29$,

olduğuna göre, a kaçtır?

10. $X = \begin{bmatrix} \log_3 4 \\ \log_4 5 \end{bmatrix}$

$Y = \begin{bmatrix} \log_2 3 & \log_{25} 4 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, Y.X çarpımının sonucu nedir?

11. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$A = \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & i \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} i \\ -i \end{bmatrix}$

olduğuna göre, A.B matrisinin elemanları toplamı nedir?

12. $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 9 \\ -5 \end{bmatrix}$ veriliyor.

A.C = 2C + B olduğuna göre, C matrisi nedir?

Aklınızda olsun. A.B ≠ B.A dır. Anlayacağınız matrislerde çarpma işleminin değişme özelliği yoktur.

Kare Matrisin Kuvvetleri

2×2 boyutlu iki matrisi çarpabiliyorsanız burada sıkıntı yaşamayacaksınız.
Bir kare matrisin kuvvetlerini hesaplarken modüler aritmetiktekine benzer mantıkla ilk önce verilen matrisin sırayla 2. , 3. , 4. ... kuvvetini alın. Kuvvetini alın. Ama her kuvvetten sonra bulduğunuz sonuçları dikkatle inceleyin ve bir kural bulmaya çalışın. Bir şeyler bulursunuz herhalde☺Sonra da bu kurala göre genelleme yapın.

Örnek Soru

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, A^{44} ün eşiti nedir?

Çözelim☺
Bu şekildeki sorularda A matrisinin sırasıyla ikinci, üçüncü, dördüncü,...kuvvetini alın ve bir kural bulmaya çalışın. Genelde kinci veya üçüncü kuvvetini alınca kuralı görürsünüz. İyi bakarsanız tabii ki☺

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$

A nın karesinde işe yarar bi şey yok gibi.
Üçüncü kuvvetine bakalım.

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$

Buna dikkatli bakın bakalım bir şey görebilecek misiniz?
Söyleyeyim. Dikkatli bakarsanız

$A^3 = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} = -8 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -8I$ olduğunu görebilirsiniz.

Şimdi A^{44} ü A^3 ü kullanarak ifade edin.

Bunu $A^{44} = (A^3)^{14} \cdot A^2$ olarak düşünürseniz sonucu

$A^{44} = (-8.I)^{14} \cdot A^2$ olarak ve de birim matrisin kuvvetlerinin yine birim matris olduğunu unutmazsanız

$(-8)^{14} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = 2^{42} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$ olarak bulabilirsiniz.

Hatta bunu $-2^{43} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ şeklinde de ifade edebilirsiniz.

Biraz uzun oldu. Ama idare edin artık

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, A^2 matrisi nedir?

2. $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, A^3 ün eşiti nedir?

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, A^3 matrisini eşiti nedir?

4. $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

matrisinde a + b = c + d = 8 olduğuna göre, A^2 matrisinin birinci satır elemanlarının toplamı kaçtır?

5. $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, A^{27} matrisi nedir?

6. $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, A^{28} matrisi nedir?

7. $A=\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, A^{2012} matrisi nedir?

8. $A=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, A^{2012} matrisi nedir?

9. $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, A^{2012} matrisi nedir?

1. $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, A^{61} matrisi nedir?

2. $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, A^{15} matrisi nedir?

3. $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, A^{2014} matrisi nedir?

4. $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, A^{1967} matrisi nedir?

5. $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, A^{47} matrisi nedir?

6. $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, A^{45} in eşiti nedir?

7. $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

$B=A^2+3A+I$

olduğuna göre, B matrisi nedir?

8. $X=\begin{bmatrix}2 & -2\\ -1 & 2\end{bmatrix}$

$Y=2.X^2-X+3I$

olduğuna göre, Y matrisi nedir?

9. $A=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

$B=A^3-2.A-4.I$

olduğuna göre, B matrisi nedir?

10. $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ veriliyor.

$f(x)=x^3-3x+I$ **olduğuna göre, f(A) değeri nedir?**

11. $A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$ veriliyor.

$f(x)=x^2+x+I$ **olduğuna göre, f(A) değeri nedir?**

12. $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ veriliyor.

$f(x)=x^3+x^2$ **olduğuna göre, f(A) değeri nedir?**

Bir Matrisin Çarpma İşlemine Göre Tersi

Kare matrislerin tersi bulunabiliyor. Hepsinin olmasa bile çoğunun tersi var. Göreceksiniz☺
Daha çok 2 × 2 boyutlu matrislerin tersi lâzım olacak size. Ve bu da kolay zaten.

Pırt olarak 2 x 2 türündeki bir matrisin tersini şu şekilde bulabilirsiniz.(En azından bunu öğrenin☺)
Zaten daha yüksek mertebeden olanların tersiyle uğraşmak tam bir işkence.☺

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix} \text{ ise } A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

Yani, a ve d nin yerleri, b ve c nin de işaretleri değişiyor. Ve burada bir de şunu fark etmiş olmanız lâzım;
a.d – b.c = 0 olursa bu matrisin tersi olmaz.

Matrisin tersiyle ilgili olaraktan bilmeniz gereken ilk şey matrisin tersini bulabilmek olmalı. İkincisi de bir matris ile tersinin çarpımının birim matris olduğu.
Yani, $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$ olduğu.

Örnek Soru

$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

$B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

olduğuna göre, A.X = B eşitliğini sağlayan X matrisi nedir?

Çözelim☺
İlk önce X i nasıl bulabileceğinizi düşünün.
A.X = B eşitliğindeki X i bulmak için eşitliğin sol tarafındaki A yı yok etmek lâzım. (Eşitliğin diğer tarafına bölüm olarak geçmiyor tabii ki☺) Şunu bilirseniz mantık yürütmeniz daha kolay. Bir matrisi ancak tersiyle çarparak etkisiz hale getirebilirsiniz. Bunun için eşitliğin her iki yanını A nın tersiyle çarpın. Fakat dikkat edin. A nın tersiyle A yan yana olmalı ki X yalnız kalsın. Yani, demek istediğim şu: $\underbrace{A^{-1}\cdot A}_{\text{Birim matris}}\cdot X=A^{-1}\cdot B$

den $X=A^{-1}\cdot B$ olur.
Şimdi önce A nın tersini bulun. Formüle göre yapın ve şunu bulun.

$$A^{-1}=\frac{1}{2\cdot1-3\cdot1}\begin{bmatrix}1 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix}$$

Bulduğunuz bu matrisle B yi çarpın şimdi de.

$X=A^{-1}\cdot B$ idi.

$$X=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 2 & -3\end{bmatrix}$$

Anlaşılmayan bi yer?
Geçtim☺
Şunlar işinize yarayabilir. Belleyin☺

$X\cdot A=B$ ise $X\cdot A\cdot A^{-1}=B\cdot A^{-1}$ den $X=B\cdot A^{-1}$

$A\cdot X=B$ ise $A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B$ den $X=A^{-1}\cdot B$ olduğunu çıkarabilmek gerek.

1. $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{bmatrix}$

olduğuna göre, A matrisinin tersi nedir?

2. $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$

olduğuna göre, A matrisinin tersi nedir?

3. $A=\begin{bmatrix}-5 & -3\\ 3 & 2\end{bmatrix}$

olduğuna göre, A^{-1} matrisi nedir?

4. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

olduğuna göre, a + b toplamı kaçtır?

5. $X = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$

$X^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & n \\ m & 2 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, m + n toplamı kaçtır?

6. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, $A^{-1} \cdot B$ **çarpımının eşiti nedir?**

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, $A^{-1}.B^{T}$ **matrisi nedir?**

8. $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, $A^{T}.B^{-1}$ **matrisi nedir?**

9. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

olmak üzere, $A^{-1} \cdot X = B$ **eşitliğini sağlayan X matrisi nedir?**

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

A.X = B olduğuna göre, X matrisi nedir?

2. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

olmak üzere, C.A = B eşitliğini sağlayan C matrisi nedir?

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

olmak üzere, $A \cdot X = B^{T}$ **olduğuna göre, X matrisi nedir?**

4. $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

olmak üzere, A.X = B olduğuna göre, X matrisi nedir?

5. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

olmak üzere, $B \cdot A = A^{T}$ **olduğuna göre, B matrisi nedir?**

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

$C \cdot A^{-1} = B$ **olduğuna göre, a + b + c + d toplamı kaçtır?**

7. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$

$B \cdot C^{-1} = A$ olduğuna göre, x.y + z – t kaçtır?

Hatırlayın. Ne zaman bir matrisin tersi olmuyordu?

8. $A = \begin{bmatrix} x & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

matrisinin tersi olmaması için x kaç olmalıdır?

9. $A = \begin{bmatrix} a & 2 \\ a+2 & 3 \end{bmatrix}$

matrisinin tersi olmadığına göre, a kaçtır?

DETERMİNANTLAR

Determinant çok daha kolay.

A matrisinin determinantı $|A|$ veya det(A) ile gösteriliyor.

Tabii ki $|A|$nın mutlak değerle bir ilgisi yok. Karıştırmayalım lütfen☺

Şimdi size 1 × 1, 2 × 2 ve 3 × 3 türündeki matrislerin determinantını nasıl bulcanızı göstereyim.

Acayip kolay☺

İlk önce 1 × 1türündeki.

$A = [5]$ ise $|A| = 5$

$A = [-3]$ ise $|A| = -3$

$A = [x]$ ise $|A| = x$ tir.

Gördüğünüz üzre çok kolay☺

Gelelim 2 × 2 boyutlu matrisin determinantına.

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ise $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ dir.

Örneğin,

$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 14$ tür.

Örnek Soru

$$\begin{vmatrix} \log_2 9 & 5 \\ 2 & \log_3 8 \end{vmatrix}$$

determinantının değeri kaçtır?

Çözelim☺

Determinant sorularının çoğunda sorular acayip kolay. Göreceksiniz zaten☺

Eğer birazcık zorluğu olacaksa da bilin ki bu determinantla ilgi değil, önceki konularla ilgili bilgilerden kaynaklanıyor olabilir.

Meselâ bu soruda birazcık logaritma bilmek lâzım.

Taban değiştirme olayı filan.

$$\begin{vmatrix} \log_2 9 & 5 \\ 2 & \log_3 8 \end{vmatrix} = \log_2 9 \cdot \log_3 8 - 5.2 = 6 - 10 = -4$$

Şimdi "Nasıl bu kadar hızlı buldunuz?"gibi şey düşünüyorsanız.

El cevap: Tecrübe☺

Çalışınca sizinde olacak. Emin olun.

Sabırlı ve kararlı bi şekilde devam edin. Eninde sonunda açılacak o başarı kapısı. Yeter ki adam gibi istemeyi bilin☺

1. $A = [-3]$

olduğuna göre, $|A|$ kaçtır?

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, $|A|$ kaçtır?

3. $A = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, $|A|$ kaçtır?

4 $\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$

toplamının değeri kaçtır?

5. $A = \begin{bmatrix} a+3 & a \\ a & a-3 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, $|A|$ kaçtır?

6. $\begin{vmatrix} a+1 & a \\ a & a-1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} x & x-2 \\ x+2 & x \end{vmatrix}$

toplamının değeri kaçtır?

7. $\det\begin{bmatrix} x+1 & 4 \\ x & 2 \end{bmatrix} = 16$

olduğuna göre, x kaçtır?

$\sin^2 x + \cos^2 x$ toplamı kaça eşitti? Hatırlıyor musunuz? Bu soruda lâzım da☺

8. $A = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$

olduğuna göre, $|A|$ kaçtır?

9. $A=\begin{bmatrix} \sin x+1 & \cos x+1 \\ 1-\cos x & \sin x-1 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, $|A|$ kaçtır?

10. $\begin{vmatrix} \tan\frac{\pi}{3} & -2 \\ 3 & \cot\frac{\pi}{3} \end{vmatrix}$

determinantının değeri kaçtır?

Logaritma biliyorsanız bu soruda da sıkıntınız olmaz☺

11. $\begin{vmatrix} 3 & \log_2 27 \\ \log_3 8 & -2 \end{vmatrix}$

determinantının değeri kaçtır?

12. $\begin{vmatrix} \log_3 9 & \log_2 8 \\ \log_5 1 & 5 \end{vmatrix}$

determinantının değeri kaçtır?

13. $i^2=-1$ olmak üzere,

$\begin{vmatrix} i+1 & 3 \\ 2 & i-1 \end{vmatrix}$

olduğuna göre, $|A|$ kaçtır?

14. $\begin{vmatrix} x+1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=22$

olduğuna göre, x kaçtır?

15. $\begin{vmatrix} x-2 & 3 \\ 2 & x+1 \end{vmatrix}=-2$

olduğuna göre, x in alabileceği değerler toplamı kaçtır?

16. $\begin{vmatrix} x+3 & x-1 \\ 2x-3 & 2x+1 \end{vmatrix}=36$

olduğuna göre, x kaçtır?

Meselâ şu soruda 2574 = a deyip diğerlerini de a türünden yazınca sonuç daha kolay çıkıyor☺

1. $\begin{vmatrix} 2575 & 2576 \\ 2574 & 2575 \end{vmatrix}$

determinantının değeri kaçtır?

2. $\begin{vmatrix} 999 & 1000 \\ 1001 & 1002 \end{vmatrix}$

determinantının değeri kaçtır?

3. $A=\begin{bmatrix} 2010 & 2012 \\ 2011 & 2013 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, $|A|$ kaçtır?

4. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & x \end{bmatrix}$

matrisinin elemanları 2 artırıldığında determinantı değişmediğine göre, x değeri nedir?

3 × 3 tipindeki bir determinantın değerini hesaplarken Sarrus kuralı denen (Galiba bu adam bulmuş bunu☺) kuralı kullancaz. Ama zor değil kesinlikle.
Ben bir örnek yapayım. Anlayacaksınız zaten.

Örnek Soru

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

determinantının değeri kaçtır?

Çözelim☺

Şimdi aşağıda baktığınızda karmakarışık duran bi şey yapcam. Ama korkmayın. Çok basit bi şey☺ İnceleyin bakalım. Ne yaptığımı anlamayanlar için anlatcam yine de.

4.1.1 = 4
2.(-1).0 = 0
(-2).3.3 = -18
+
T_{sol} = 4 + 0 - 18 = - 14

2.1.3 = 6
(-2).(-1).1 = 2
4.3.0 = 0
+
$T_{sağ}$ = 6 + 2 + 0 = 8

Determinantın değeri 8 – (– 14) = 22 dir.

Ne yaptığımı anlatayım.

3 × 3 tipinde bir determinantın değerini hesaplarken ilk önce birinci ve ikinci satırı üçüncü satırın altına aynen yazdım.

2	3	1
-2	1	0
4	-1	3
2	3	1
-2	1	0

İkinci olarak okların yönündeki sayıları çarptım. Ve sağ tarafın ve sol tarafın ayrı ayrı toplamlarını buldum.

4, 0, -18 → -14
6, 2, 0 → 8

Son olarak da sağ taraftaki toplamdan(8 den) sol taraftakini (–14 ü) çıkardım ve olayı bitirdim.☺
Artık bu determinantın değerinin 8 – (– 14) = 22 olduğunu bulursunuz herhalde.
Var mı anlamadığınız bi yer?
Her halükarda geçeceğim de. Nezaketen sorayım dedim☺

5. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

determinantının değeri kaçtır?

6. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

determinantının değeri kaçtır?

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, $|A|$ kaçtır?

8. $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, $|A|$ kaçtır?

9. $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, $|A|$ kaçtır?

10. $i^2 = -1$ olduğuna göre,

$\begin{vmatrix} 1 & 1-2i & -1 \\ i & 1+i & 0 \\ 0 & 1 & i \end{vmatrix}$

determinantının değeri nedir?

11. $i^2 = -1$olmak üzere,

$A = \begin{bmatrix} i & -1 & 1 \\ 1 & -i & i \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, $|A|$ kaçtır?

12. $\begin{vmatrix} x & 2 & x \\ 1 & 4 & 3 \\ x & 1 & x \end{vmatrix} = -16$

olduğuna göre, x kaçtır?

Determinantla ilgili bir kaç özellik☺

- $|A| = |A^T|$

Bir matris ile transpozesinin determinantı eşittir.

1. $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, $|A^T|$ kaçtır?

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, $|A^T|$ kaçtır?

$|A^n| = |A|^n$ dır .

3. $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, $|A^5|$ kaçtır?

4. $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, $|A^3|$ kaçtır?

5. $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, $|A^{-1}|$ kaçtır?

6. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, $|A^{-1}|$ kaçtır?

- A ve B aynı boyutlu kare matris ise,

$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

7. $A = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, $|A.B|$ kaçtır?

8. $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, $|A.B|$ kaçtır?

9. $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, det(A.B) kaçtır?

10. $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, det(A.B) kaçtır?

11. $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, $\det\left(A^2 - B^2\right)$ kaçtır?

- Kare matrisin herhangi iki satır ya da sütunu aynı ise ya da orantılıysa determinantı sıfırdır.

12. $\begin{vmatrix} 125 & 132 \\ 375 & 396 \end{vmatrix}$

determinantının değeri kaçtır?

1. $\begin{vmatrix} 3 & 15 & 10 \\ 5 & 25 & 20 \\ 7 & 35 & 30 \end{vmatrix}$

determinantının değeri kaçtır?

2. $\begin{vmatrix} 2 & 152 & 3 \\ 4 & 304 & 6 \\ 6 & 9 & 12 \end{vmatrix}$

determinantının değeri kaçtır?

- Kare matrisin herhangi bir satırındaki (veya sütunundaki) elemanlar başka bir satıra eklenip çıkarılabilir. Determinantın değeri değişmez.
Hatta 2 katı, 3 katı, 4 katı...alınarak da eklenip çıkarılmasında bir sıkıntı olmaz. Determinant değeri aynı kalır. Değişmez.

Meselâ şunda ikinci satırdan birinci satırı olduğu gibi çıkarıp da yapmak daha hoş. Ya da uzun uzun çarpın. Siz bilirsiniz☺

3. $\begin{vmatrix} 101 & 102 & 103 \\ 104 & 102 & 103 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

determinantının değeri kaçtır?

- n×n boyutlu bir matrisin k katı alınırsa determinantın k^n katına çıkar.

4. A, 3 × 3 boyutlu kare matris olmak üzere,

$|A| = 3$

olduğuna göre, $|3.A|$ determinantının değeri kaçtır?

5. A, 2 × 2 boyutlu kare matris olmak üzere,

$|A| = -5$

olduğuna göre, $|2.A^T|$ determinantının değeri kaçtır?

6. A, 3 × 3 boyutlu kare matris olmak üzere,

$|A| = 3$

olduğuna göre, $|-2 \cdot A^T|$ determinantının değeri kaçtır?

7. A, 3 × 3 boyutlu kare matris olmak üzere,

$|A| = 2$

olduğuna göre, $\left|\left(A^{-1}\right)^T\right|$ determinantının değeri kaçtır?

Minör ve Eş Çarpan (Kofaktör)

Çok lâzım olur mu bilmiyorum. Ama vereyim. Zor bi şey değil. Sınavda gelir de yapmasanız ayıp olur☺ A, kare matrisinin 2.satır ve 3.sütunu atıldıktan sonra geriye kalan matrisin determinantına a_{23} elemanının **minörü** denir ve M_{23} ile gösterilir.

$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23}$ sayısına da a_{23} elemanının **eş çarpanı (kofaktörü = işaretli minörü)** denir. Tabii ben burada a_{23} ü verdim. Diğer bütün elemanlar için de aynı mantığı kullanabilirsiniz.

Örnek Soru

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinin a_{23} elemanının minörü ve kofaktörü kaçtır?

Çözelim☺

a_{23} elemanının minörünü bulmak için 2. satırı ve 3. sütunu silin. Bakın bakalım geriye ne kaldı?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Geriye kalan $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantı kaç ise a_{23} elemanının minörü odur.

Yani, $M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9$ dur.

Bunu bulunca kofaktörü bulmak kolay.

a_{23} ünkofaktörü de $A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 9$ dur.

Böyle bi şey işte. Soru gelirse yaparsınız gari☺☺

8. $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

matrisinin a_{12} elemanının minörü kaçtır?

9. $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

matrisinin a_{33} elemanının minörü kaçtır?

10. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

matrisinin a_{32} elemanının minörü kaçtır?

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

matrisinin a_{32} elemanının kofaktörü kaçtır?

12. $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$

matrisinin a_{31} elemanının kofaktörü kaçtır?

Ek Matris

$A = \left[a_{ij}\right]_{nxn}$ olmak üzere, $A = \left[A_{ij}\right]^T$ matrisine A matrisinin ek matrisi denir ve Ek (A) ile gösterilir. "Bu da nereden çıktı?" di mi?

Neyse... Şu kadarını bilin yeter.

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisinin ek matrisi, $Ek(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

1. $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

matrisinin ek matrisi nedir?

2. $A = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, ek(A) nedir?

3. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, ek(A) nedir?

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, ek(A) nedir?

Ek matris yardımıyla ters matrisin bulunması

A matrisinin determinantı sıfırdan farklı olmak şartıyla,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot Ek(A)$$

Demek ki ek matris yardımıyla bir matrisin tersini bulurken hem matrisin determinantını hem de ek matrisi bulmak gerekiyormuş.
Ama dua edin de 3×3 boyutlu bir matrisin tersini sormasınlar☺ Sorarsalar bi soruyu da yapmayıverirsiniz. gari☺ Şaka şaka...
Bunu aslında bir şeyi görmeniz için verdim.
Bir matrisin tersinin olması için determinantı sıfırdan farklı olmalı. Bu önemli işte. Sormuşlar bunu. Bir defacık. Ama olsun.☺

5. $A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 3 & x \end{bmatrix}$

matrisinin ters matrisi olmadığına göre, x kaçtır?

6. x in hangi değeri için,

$$\begin{bmatrix} x+2 & x-1 \\ x+3 & x+1 \end{bmatrix}$$

matrisinin ters matrisi bulunamaz?

7. $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

matrisinin ters matrisi nedir?

8. $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

matrisinin ters matrisi nedir?

9. $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

matrisinin ters matrisi nedir?

10. $A = \begin{bmatrix} a & a+1 \\ a-1 & a \end{bmatrix}$

matrisinin ters matrisi nedir?

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & x & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

matrisinin ters matrisi olmaması için x kaç olmalıdır?

12. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & x & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

matrisinin ters matrisi olmaması için x kaç olmalıdır?

13. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & x \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

matrisinin ters matrisi olmaması için x kaç olmalıdır?

Cevaplar

Bir milletin geleceği hakkında kehanette bulunmak isteyenler o milletin gençliğine verilen terbiyeye baksınlar. Kehanetlerinde yüzde yüz isabet ederler.

***

CEVAPLAR

KÜMELER

1. Antrenman
Sayfa 11-12

1. 7
2. 6
3. 3
4. 5
5. 2
6. 7
7- 7
8. IV
9. 4
10. a) 10
b) 10
c) 56
d) 35
e) 35
f) 12
g) 16
h) 50
11- 35
12. 36
13- 6
14. 20
15. 22

2. Antrenman
Sayfa 13-14

1. 10
2- 15
3. 10
4. 10
5. 10
6. 4
7. 6
8. 20
9. 16
10- 8
11. 16
12. 8
13. 8
14. 8
15. 32
16. 16

3. Antrenman
Sayfa 15-16

1. 22
2- 8
3. 2^6
4. 3
5. 5
6- 10
9. 3
10- 4
11. 2^4
12. 16
13. 6
14. 10
15. 21
16. 21

4. Antrenman
Sayfa 19-20

1. $\{e,f,g\}$
2. $\{1,3\}$
3. 4
4. 10
5. 12
6. 2^4
7. 13
8. 4
9. $\{a,b,c,d,e,f\}$
10. $\{1,2,3,4,5,6,8\}$
11. $\{a,d,f\}$
12. $\{1,3,5,7\}$
13. 12
14. 8
15. 4
16. 4

5. Antrenman
Sayfa 21-22

1. 2^3
2. 3
3. 4
4. 8
5. 10
6. 9
7. 3
8. 1
9. 12
10. 33
11. 11
12. 10
13. 13
14. 13
15. 14
16. 9

6. Antrenman
Sayfa 23-24

1. 2
2. 4
3. 3
4. 20
5. 2
6. 3
7. 4
8. 4
9. 10
10. 8
11. 8
12. 8
13. 14
14. 7
15. 1
16. 5

7. Antrenman
Sayfa 25-26

1. 13
2- 23
3. 25
4. 6
5. $(A \cup B)/C$
6- $B \cap (A \cup C)$
7. $B/(A \cup C)$
8. $(A \cup C)/B$
9. 71
10. 47
11. 24
12. 47
13. 94
14. 6
15- 8

8. Antrenman
Sayfa 27-28

1. 39
2. 45
3. 22
4. 18
5. 20
6. 5

9. Antrenman
Sayfa 29-30

1. 7
2. 15
5. 11
6. 48
7. 15
8. 120
9. 10
10. 29
11. 4
12. 4

KARTEZYEN ÇARPIM BAĞINTI

1. Antrenman
Sayfa 35-36

1. 7
2. 5
3. 14
4. 20
5. 4
6. 16
7. $\{(2,1)(2,5)(3,1)(3,5)(4,1)(4,5)\}$
8. $\{2,3,4\}$
9. 15
10. 6
11. 9
12. 6
13. 4
14. 24

2. Antrenman
Sayfa 37-38

2. 6
3. 20
4. 6
5. $\frac{5}{2}$
6. $3\sqrt{2}$
6. $A = \{1,3\}$
$B = \{2,3,4\}$
8. $A = \{1,3\}$
$B = [1,2)$
9. $A = \{1,2\}$
$B = (1,4]$
10. $A = [1,3)$
$B = [1,4]$
11. 30
12. 12
13. 9
14. 24

3. Antrenman
Sayfa 39-40

1. 4
2. 5
3. 4
4. $\frac{1}{2}$
5. 12
6. 2^9
7. 36
8. 2^8
9. 2^7
10. 2^6
11. 2^6
12. 2^5
13. 20
14. 10
15. 10
16. 6

4. Antrenman
Sayfa 41-42

1. 4
2. 12
3. 5
4. $\frac{17}{3}$
5. $\{(4,2)\}$
6. $\{(-5,-20)(2,1)\}$
7. $\{(5,1)\}$
8. α,θ
9. β,θ
10. β,θ
11. 5
12. 9
13. 5
14. $\{2,5\}$
15. $\{-4,3\}$
16. $\{-4,2\}$

FONKSİYONLAR

1. Antrenman
Sayfa 45-46

1. 8
2. 12
3. 3
4. 8
5. 27
6. 4
7- 13
8. 18

11. 7
12. 5
13. 12
14. 2
15. 5
16. 6

2. Antrenman
Sayfa 47-48

1. −1
2- 10
3. 10
4. 14
5. 5
6- 8
7. 8
8. 35
9. 19
10- 2
11. 4
12. 15
13. 4
14- 14
15. 5
16. 2

3. Antrenman
Sayfa 49-50

1. 3
2- $\{2,6,10\}$
3. $\{2,0,6\}$
4. 14
5. 11
6- 8
7. 7
8. 15
9. −1
10- −6
11. 17
12. 64
13. 25
14. 26
15. 7
16. 16

4. Antrenman
Sayfa 51-52

1. 5
2. 8
3. 2
4. 5
5. 2
6. −2

9. −8
10. 4
11. 6
12. 6
13. 12
14. 12
15. 15
16. 15

5. Antrenman
Sayfa 53-54

1. 10
2. 50
3. 20
4. 12
5. $\frac{1}{2}$
6. 32
7. 99!
8. 4
9. 16
10. 4
11. 5
12. −17
13. 24
14. 6
15. 12

6. Antrenman
Sayfa 55-56

1. I, II, IV
2. II, IV
3. 7
4. 24
5. 2
6. −4
7. −10
8. 5
9. 7
10. 12
11. −12
12. 12

7. Antrenman
Sayfa 57-58

1. 8
2- 7
3. 24
4. 30
5. 23
6- 8
7. 5
8. 5
9. $\{(4,1),(0,2),(6,3)\}$

8. Antrenman
Sayfa 59-60

1. 11
2. 6
3. 2
4. 4
5. 14
6. $\frac{x+1}{3}$
7. $\frac{4x+3}{2}$
8. $\frac{3x-7}{-5}$
9. 5
10. 2
11. $\frac{x-1}{2x-3}$
12. $\frac{-dx+b}{cx-a}$
13. $\frac{x+2}{3x+2}$

9. Antrenman
Sayfa 61-62

1. $\frac{3x}{2x-3}$
2. $\frac{3x+2}{3x}$
3. $\frac{3}{-3x-2}$
4. $\frac{2x-1}{3x+1}$
5. $\frac{2x+3}{1-x}$
6. $\frac{3x-2}{x-3}$
7. $\frac{5x+1}{2x+3}$
8. 3
9. $R-\{5\}$
10. 12
11. 5
12. x^2+2
13. $(x+3)^2$
14. x^3-1
15. x^2+4x+3
16. $(2x+1)^2$

10. Antrenman
Sayfa 63-64

1. $\sqrt[3]{x+1}+2$
2. $\frac{2x+1}{3}$
3. $\frac{1-x}{2x-3}$
4. $\frac{x-5}{3x-2}$
5. $\frac{2x-1}{3-x}$
6. $\frac{x^2+2}{1-2x}$
7. $\sqrt{x-3}+2$
8. $\sqrt{x-1}+2$
9. $\sqrt{x-4}-1$
10. $2-\sqrt{x-1}$
11. $\frac{-\sqrt{x-1}-1}{2}$

11. Antrenman
Sayfa 65-66

1. $2x^2+5$
2. $6x-3$
3. $4x+3$
4. $6x+2$
5. $\frac{x^2}{4}$
6. $\frac{2x+5}{2x-1}$
7. $6x^2+3x-1$
8. x^2-2x-2
9. $18x^2+1$
10. 10
11. 17
12. 1
13. 11
14. 3
15. 122
16. 10

12. Antrenman
Sayfa 67-68

1. $\frac{4x^2-2}{3}$
2. x^2+2x+2
3. $9x^2-12x$
4. $\frac{x^2-10x+21}{4}$
5. 8
6. $3x+4$

9. 27
10. $x+3$ veya $-x-1$
11. $2f(x)+2$
12. $4f(x)-12$

13. Antrenman
Sayfa 69-70

1. $\frac{7f(x)+3}{f(x)+5}$
2. $8f^2(x)$
3. $\frac{f^2(x)}{27}$
4. $f^2(x)-2$
5. 5
6. 3
7. 1
8. 5
9. 4
10. 3
11. 2
12. $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&1&5\end{pmatrix}$
13. $\begin{pmatrix}a&b&c&d\\c&d&b&a\end{pmatrix}$
14. $\begin{pmatrix}a&b&c&d\\b&c&d&a\end{pmatrix}$
15. $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$
16. $6x+1$
17. 7
18. 70
19. 41
20. $\frac{7}{6}$
21. 2
22. $\frac{-1}{4}$

14. Antrenman
Sayfa 71-72

1. 4
2. 1
3. 5
4. 2
5. 12
6. 10
7. $\frac{8}{7}$
8. −2

15. Antrenman
Sayfa 73-74

1. 3
2. 2
3. −2
4. 0
5. −12
6. 3
7. 4
8. 5
9. 3
10. a) 2
    b) 3

İŞLEM

1. Antrenman
Sayfa 75-76

1. 18
2. −1
3. 23
4. 4
5. 60
6. 3
7. 1
8. 17
9. 67
10. 5
11. 9
12. 6
13. $\frac{4}{3}$
14. 13

2. Antrenman
Sayfa 77-78

1. 1
2. 18
3. 30
4. 3
5. 10
6. 3
7. 17
8. 2
9. 16
10. 23
11. 13
12. 27
13. 9
14. ab
15. ab

3. Antrenman
Sayfa 81- 82

1. I, III
2. I,III, IV

5. 10
6. 4
7. $y=\frac{1}{2}, e=0$
8. $e=-1$ $y=-2$
9. $e=-\frac{3}{4}$ $y=-1$
10. $e=1$ $y=5$
11. $e=6$ $y=1$
12. 0
13. −13
14. $-\frac{2}{3}$

4. Antrenman
Sayfa 83-84

1. $\frac{1}{4}$
2. 3
3. $-\frac{1}{3}$
4. −2
5. c
6. a
7. d
8. b, a, e, d, c
9. e
10. c
11. a
12. a
13. 3
14. 4
15. 1
16. 3
17. 2
18. a

MODÜLER ARİTMETİK

1. Antrenman
Sayfa 87-88

1. 1:00
2. 13:00
3. perşembe
4. pazartesi
5. pazartesi
6. cumartesi
7- perşembe
8. 20 : 40
9. pazar
7- 8
8. C
9. E

2. Antrenman
Sayfa 89-90

1. 5
2- 8
3. 21
4. 27
5. 3
6- 24
7. 5
8. 17
9. 99
10- 116
11. 3
12. 3

3. Antrenman
Sayfa 91-92

1. 4
2- 4
3. 1
4. 2
5. 3
6- 5
7. 4
8. 2
9. 4

4. Antrenman
Sayfa 93-94

1- 6
2. 5
3. 0
4. 0
5. 0
6. 1
7. 8
8. 4
9. 2
10. 1
11. 4
12. 3
13. 1
14. 7

5. Antrenman
Sayfa 95-96

1. 3
2. 5
3. 1
4. 5
5. 8
6. 5
7. 9
11. 3
12. 5
13. 7
14. 18
15. 12
16. 26

6. Antrenman
Sayfa 97-98

1. 4
2. −3
3. 5
4. 9
5. 3
6. 11
7. 41
8. 10

7. Antrenman
Sayfa 99-100

1. a) 2
b) 3
c) 2
d) 2
2. a) 2
b) 0
c) 3
d) 4
3. 4
4. 4
5. 4
6. $2x^2+2x+1$
7. $3x^2+5x$
8. 5
9. 0
10. 5
11. x
12. $\{1,4\}$
13. 8

POLİNOMLAR

1. Antrenman
Sayfa 101-102

1. I, II, IV, VI
2. a) 3
b) 3
c) −1
d) 6
e) 2
3. a) 4
b) 8
c) 100
4. a) 4
b) $7\sqrt{2}$
c) −100
d) $-103+7\sqrt{2}$
e) 10
5. 6
6. 4
7. 11
8. 9
9. 2
10. −1
11- 2
12. −5

2. Antrenman
Sayfa 103-104

1. 22
2- 4
3. 2
4. 125
5. 17
6- 4
7. $10x+3$
8. x^2-1
9. x^2+3x+2
10- x^2+5x+4
11. 10
12. 5
13. 14

3. Antrenman
Sayfa 105-106

1. −1
2- 6
3. −10
4. −3
5. 0
6- 0
7. 11
8. 12
9. 5
10- −21
11. 2

4. Antrenman
Sayfa 107-108

1. $x^3+5x^2-7x+15$
2. $x^5-5x^3+2x^2+x+4$
3. $-x^4-x-5$
4. $5x^7+4x^5-3x+4$
5. $6x^2+5x+1$
8. x^3+2x^2+2x+1
9. 11
10. 22
11. −36
12. 7
13. 14

5. Antrenman
Sayfa 109-110

1. 18
2. 4
3. 4
4. −16
5. −8
6. $\frac{3}{2}$
7. 3
8. 3
9. 3
10. 6
11. 2

6. Antrenman
Sayfa 111-112

1. 7
2. −12
3. 2
4. −20
5. −20
6. −7
7. 49
8. 17
9. 3
10. −3
11. 22

7. Antrenman
Sayfa 113-114

1. 2
2. 1
3. 4
4. 3
5. −2012
6- −4
7. 6
8. 10
9. −10
10. −6
11. 255

14. 11
15- 9
16. 7

8. Antrenman
Sayfa 115-116

1. 2
2. 11
3. −12
4. $3+\sqrt{2}$
5. 3x
6. $-x^2-x-1$
7. 5
8. 2
9. 1
10. $-\frac{3}{2}$
11. 6

9. Antrenman
Sayfa 117-118

1. (4,−1)
2. E
3. E
4. D
5. C
6. B
7. B
8. 2

10. Antrenman
Sayfa 119-120

1. −5
2. 5
3. 12
4. −5
5. 26
6. −3
7. 3
8. 6
9. b, d
10. c
11. $(x+1)(x+2)$
12. $(x-2)(x^2+x+1)$
13. $(x^2-9)(x-2)(x+2)^2(x+4)$
14. $x(x-1)^3(x+1)^2(x^2+1)(x+2)$

İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER

1. Antrenman
Sayfa 123-124

1. $\{-2,-1\}$
2. $\{0,5\}$
3. $\{-1,6\}$
4- $\left\{\frac{1}{2},1\right\}$
5. $\left\{-1,\frac{8}{15}\right\}$
6. $\{-5,2\}$
7. $\{-6,2\}$
8. $\{-4,3\}$
9. $\{1,4\}$
10. −1
11. $\frac{-10}{9}$
12. −4
13. $\frac{1}{15}$

2. Antrenman
Sayfa 125-126

1. I, II, III
2- III, IV
3. I
4. $\{-2-\sqrt{5},-2+\sqrt{5}\}$
5. $\{-1-\sqrt{5},-1+\sqrt{5}\}$
6- $\{-2-\sqrt{6},-2+\sqrt{6}\}$
7. $\{-2-2\sqrt{3},-2+2\sqrt{3}\}$
8. $\left\{\frac{-1-\sqrt{21}}{2},\frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right\}$
9. 0
10- 10
11. $\left(-\infty,-\frac{3}{4}\right)$

3. Antrenman
Sayfa 127-128

1. 0
2- $\left(-\frac{29}{12},\infty\right)$
5. a) 4
b) 2
c) 2
6- a) −3
b) −2
c) $\frac{3}{2}$
d) 6
e) 13
f) −4

4. Antrenman
Sayfa 129-130

1. −4
2. 2
3. 10
4. $\frac{-5}{4}$
5. 6
6. $\frac{5}{2}$
7. 3
8. 0
9. −3
10. 8
11. 6
12. $-\frac{3}{2}$
13. $-\frac{21}{4}$
14. −2
15. $\sqrt{11}$
16. 1

5. Antrenman
Sayfa 131-132

1. $x^2+2x-24=0$
2. $x^2-6x+7=0$
3. $x^2-2x-2=0$
4. $x^2-10x+17=0$
5. $x^2+3x+1=0$
6. $x^2+2x-1=0$
7. $2x^2+5x-1=0$
8. $x^2-10x+8=0$
9. $x^2-5x+2=0$
10. $x^2-x-8=0$
11. $x^2-6x+4=0$
12. $x^2+6x-2=0$
13. $x^2-14x+1=0$

6. Antrenman
Sayfa 133-134

1. $\{-5,2,3\}$
2. $\{-3,-2,-1,2\}$
3. $\left\{-3,-\frac{1}{2},1\right\}$
4- $\{-5,4\}$
5. $\{-4,3\}$
6. $\{-4,5\}$
7. $\{6\}$
8. $\{1\}$
9. $\{2\}$
10. $\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$
11. $\{-3,-2,2,3\}$
12. $\{1,3\}$

7. Antrenman
Sayfa 135-136

1. $\{0\}$
2. $\{2\}$
3. t − 3
4- $\{-2,-1,2,3\}$
5. $\{-2,2\}$
6. $\{1\}$
7. $\left\{\frac{1}{2},-\frac{12}{11}\right\}$
8. $\{25\}$
9- $\{-1,2\}$
10. $\{-5,1,2\}$
11. $\{5\}$
12. $\{(-3,-2),(2,3)\}$
13. $\{(2,0)\}$
14. 8

EŞİTSİZLİKLER

1. Antrenman
Sayfa 137-138

1. $(4,\infty)$
2. $(-\infty,2]$
3. $(3,\infty)$
4. 4
5. 5
6. 10
7. 7

2. Antrenman
Sayfa 139-140

1. $(-2,1)$
2. -3
3. 5
4. $(-2,1)$
5. $(1,3)$
6. 6
7. 14
8. $(-\infty,-3)\cup(-1,2)$
9. $(-2,-1)\cup(2,\infty)$
10. 0
11. $(2,3)$
12. -2
13. -7
14. 3
15. -5
16. 3

3. Antrenman
Sayfa 141-142

1. 2
2. -1
3. 7
4. 3
5. 8
6. 14
7. -32
8. 4
9. $(-5,-1)\cup(3,4)$
10. $(-4,0)\cup(2,4)$
11. 12
12. 5
13. 0
14. 3
15. $(-2,2)$
16. $(-3,1)\cup(3,\infty)$

4. Antrenman
Sayfa 143-144

1. $(-1,2)$
2. $(-5,3)$
3. $(1,3)$
4. 3
5. -3
6. $(-4,-2)\cup(4,\infty)$
7. 3
8. 9
9. $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$
10. $(-3,-2)\cup(3,\infty)$
11. $(2,7)$

14. $\left(-\infty,\frac{5}{2}\right)\cup(4,\infty)$
15. -39

5. Antrenman
Sayfa 145-146

1. 15
2. $(-\infty,-1]\cup[6,\infty)$
3. $(1,3]$
4. $(-\infty,-6]\cup(-1,9]$
5. -3
6. -5
7. -2
8. -3
9. 1
10. $(-\infty,-6]\cup(-2,3)$
11. 3

6. Antrenman
Sayfa 147-148

1. -1
2. 6
3. 0
4. 2
5. $(-\infty,3)$
6. 10
7. $(-\infty,-5)\cup[0,2]$
8. 15
9. $(-\infty,-3)$
10. $(-\infty,-3)\cup(-3,5)$

7. Antrenman
Sayfa 149-150

1. $(-\infty,-2)\cup(-2,-1)\cup(1,\infty)$
2. $(2,\infty)$
3. $(-\infty,-3)$
4. $[-2,\infty)$
5. $(-\infty,6]$
6. 4
7. 17
8. 12
9. $(-\infty,-4)\cup(-4,2)$
10. $[-6,2)$
11. $(-3,\infty)$
12. 12
13. $(-4,-3)\cup(-3,5)$
14. 6
15. 5

8. Antrenman
Sayfa 151-152

1. $(2,4]$
2. $(3,\infty)$
3. $(-5,0)$
4. $(2,5)$
5. $(0,2)$
6. $(-\infty,-3)\cup(3,4)$
7. 5
8. 18
9. $(1,2)$

9. Antrenman
Sayfa 153-154

1. 5
2. 0
3. 9
4. 55
5. $(-4,-1)\cup(2,5)$
6. $(3,\infty)$

10. Antrenman
Sayfa 155-156

1. C
2. E
3. D
4. $(-\infty,2)$
5. 6
6. $(0,4)$
7. $(-3,2)\cup(3,\infty)$
8. $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$
9. $(1,5)$
10. $(3,4)$
11. $(-2,-1)$
12. $(3,7)$
13. $(2,11)$
14. $(8,\infty)$

PARABOL

1. Antrenman
Sayfa 157-158

1. 4
2. 2
3. 3
4. 6
5. -3
6. 5

2. Antrenman
Sayfa 159-160

1. 4
2. I, IV
3. I, III
4. a) 4
   b) 0
5. a) ∓ 3
   b) -1, 5
6. $(-\infty,4)$
7. 1
8. 3
9. 5

3. Antrenman
Sayfa 161-162

1. 3
2. -2
3. 3
4. 1
5. -32
6. 2
7. 4
8. -3
9. I, III
10. I
11. 10
12. $(-4,4)$
13. $(-\infty,-4)$
14. $(2,\infty)$
15. 7
16. 5

4. Antrenman
Sayfa 163-164

1. a) 2
   b) 3
   c) $\frac{3}{2}$
   d) -1
2. -1
3. 4
4. -2
5. a) $(2,-2)$
   b) $(3,13)$
   c) $(1,1)$
   d) $(0,-9)$
6. $\frac{13}{2}$
7. 1

5. Antrenman
Sayfa 165-166

1. 9
2. $x=-2$
3. 5
4. 5
5. 9
6. 2
7. 8
8. 6
9. 4
10. 1
11. -2
12. 14
13. 4
14. 26
15. 18
16. -8

6. Antrenman
Sayfa 167-168

1. 8
2. -6
3. -10
4. 50
5. $y=x^2-x-2$
6. $y=x^2-4x+3$
7. $y=-x^2+4$
8. 3
9. $y=-x^2+4x$

7. Antrenman
Sayfa 169-170

1. $y=-\frac{x^2}{2}+\frac{5x}{2}-2$
2. 12
3. -3
4. $-\frac{2}{3}$
5. $\frac{16}{3}$
6. 4
7. a) $(3,5)$
   b) $(-5,2)$
   c) $(1,0)$
   d) $(0,6)$

8. Antrenman
Sayfa 171-172

1. $y=2.(x-2)^2-4$
2. $y=2.(x-2)^2$
3. $\frac{9}{2}$
4. $\frac{3}{4}$
5. 4
6. 6
7. 1
8. $(0,1)$ $(3,-5)$
9. $(1,2)$ $\left(-\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right)$
10. $(1,3)$ $(-1,1)$

9. Antrenman
Sayfa 173-174

1. 0
2. 1
3. 1
4. B
5. C

10. Antrenman
Sayfa 175-176

1. B
2. C
3. B
4. B

TRİGONOMETRİ

1. Antrenman
Sayfa 179-180

1. a) $\frac{3}{5}$
   b) $\frac{3}{4}$
   c) $\frac{4}{5}$
   d) $\frac{4}{3}$
2. a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$
   b) $\frac{1}{2}$
   c) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

   b) $\frac{15}{8}$
   c) $\frac{8}{17}$
   d) $\frac{8}{15}$
4. a) $\frac{17}{13}$
   b) $-\frac{119}{60}$
   c) $\frac{204}{65}$
5. 5
6. $\frac{11}{12}$
7- $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
8. $\frac{1}{2}$
9. $\frac{3}{5}$

2. Antrenman
Sayfa 181-182

1. $\frac{2}{5}$
2- $\frac{2}{\sqrt{5}}$
3. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ veya $\sqrt{3}$
4. $\frac{1}{3}$
5. $\frac{3}{4}$
6. $\frac{12}{13}$
7. $\frac{1}{3}$
8. $\frac{31}{12}$
9. $\frac{41}{20}$
10. 3
11. 2
12. $\frac{7}{5}$

3. Antrenman
Sayfa 183-184

1. $\frac{3}{2}$
2. $\frac{1}{5}$

4. $\frac{4}{3}$
5. $\frac{1}{2}$
6. $\tan^2 x$
7. 6
8. 1
9. 0
10. $\cot^2 x$
11. 1
12. 2
13. 1

4. Antrenman
Sayfa 185-186

1. 1
2. 1
3. $\frac{1}{2}$
4. 3
5. $\sec x$
6. $1+2a$
7. $\sec x$
8. 3
9. $2\operatorname{cosec} x$
10. $\frac{5}{8}$
11. $\frac{8}{9}$
12. 2
13. 2
14. 1
15. 2

5. Antrenman
Sayfa 187-188

1. 2
2. 2
3. 2
4. -1
5. 1
6. $\frac{3}{5}$
7. $\frac{4}{5}$
8. $\frac{1}{3}$
9. $\sqrt{2}$
10. $2\sqrt{2}$
11. 4
12. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

6. Antrenman
Sayfa 189-190

1. 7
2. $\frac{3}{8}$
3. $\frac{43}{4}$
4. $\frac{1}{2}$
5. 1
6. –3
7. $\frac{1}{2}$
8. $\frac{1}{2}$
9. $\sqrt{6}$
10. 2
11. $\sqrt{6}$
12. 4
13. 0
14. –2
15. $\frac{1}{2}$
16. $\frac{7}{4}$

7. Antrenman
Sayfa 191-192

1. $\frac{\pi}{2}$
2- $\frac{2\pi}{3}$
3. $\frac{4\pi}{5}$
4. $\frac{5\pi}{4}$
5. $\frac{5\pi}{6}$
6- 90°
7. 120°
8. 135°
9. 100°
10. 60°
11. 80°
12. 200°
13. 230°
14. $\frac{3\pi}{5}$
15. $\frac{4\pi}{3}$
16. $\frac{\pi}{2}$
17. $\frac{5\pi}{3}$

8π

8. Antrenman
Sayfa 193-194

1. $a < b < c$
2. $b < c < a$
3. $a < b < c$
4. $b < c < a$
5. $x < y < z$
6. $c < a < b$
7. $c < a < b$
8. $a < c < b$
9. –5
10. 11
11. 12
12- $[-2,3]$

9. Antrenman
Sayfa 195-196

1. a) +
b) +
c) +
d) –
e) –
f) –
2. a) –
b) –
c) +
d) +
e) –
f) –
3. a) –
b) +
c) –
d) –
e) –
f) –
4. a) +
b) +
c) –
d) –
e) +
f) –
5. +, -, +
6. -, +, -

10. Antrenman
Sayfa 197-198

1. a) $\sin x$
b) $-\cos x$
c) $-\cot x$
d) $-\tan x$
e) $-\cos x$
f) $\cot x$
g) $-\sin x$
h) $\tan x$
2. a) $\cos x$
b) $\sin x$
c) $-\tan x$
f) $\tan x$
g) $\cos x$
h) $\cot x$
3. a) $-\sin x$
b) $\cos x$
c) $-\cot x$
d) $-\tan x$
4. a) $-\frac{1}{2}$
b) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
d) $\sqrt{3}$
5. $\frac{1}{2}$
6. 1
7. 0
8. $\frac{5}{4}$
9. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
10. 1
11. 0
12. 0
13. $\frac{-1}{m}$

11. Antrenman
Sayfa 199-200

1. –1
2. – cosx
3. coşa – sina
4. 0
5. $\frac{3}{2}$
6. $\frac{4}{5}$
7. 2
8. $\frac{4}{3}$
9. $-2\sin x$
10. $\frac{x^2-1}{x^2+1}$
11. $y < z < x$
12. $k > l > m$
13. $x > z > y$
14. $-\frac{4}{3}$
15. $-\frac{4}{3}$
16. 0

12. Antrenman
Sayfa 201-202

1. 2
2. $\frac{3}{5}$
3. $\frac{1}{3}$
4. $\frac{-4}{5}$
5. $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$
$Q(\cos\alpha, -\sin\alpha)$
$R(-\sin\alpha, \cos\alpha)$
$T(-\sin\alpha, -\cos\alpha)$
6. $2\sin\alpha$
7. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
8. 2
9. 1
10. –2
11. $\frac{1}{6}$
12. –2
13. $\frac{1}{4}$
14. 2
15. –2
16. –2

13. Antrenman
Sayfa 203-204

1. a) π
b) $\frac{\pi}{5}$
c) $\frac{2\pi}{3}$
d) $\frac{\pi}{2}$
2. a) $\frac{\pi}{5}$
b) $\frac{\pi}{4}$
c) 3π
d) $\frac{5\pi}{2}$
3. $\frac{\pi}{2}$
4. 6
5. π
6. 3π
7. a) $\frac{\pi}{3}$
b) $\frac{\pi}{3}$

CEVAPLAR

d) $\frac{\pi}{3}$
8. $\frac{\pi}{4}$
9. $\frac{\pi}{3}$
10. $\frac{-\pi}{3}$

14. Antrenman
Sayfa 205-206

1. 285°
2. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$
3. $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$
4. $\frac{2\sqrt{3}-1}{2}$
5. $\frac{4}{5}$
6. $\frac{4}{3}$
7. $\frac{1}{3}$
8. $\frac{2}{\sqrt{7}}$
9. $-\frac{\sqrt{21}}{7}$
10. 2
11. $\frac{3}{5}$
12. $\frac{12}{13}$
13. $\frac{5}{2}$
14. $\frac{-1}{2}$
15. $[-8,2]$

15. Antrenman
Sayfa 207-208

1. $\left[\frac{2}{3},2\right]$
2. 7
3. $5\sin x - 3$
4. $2\cos x + 2$
5. $4 - 2\cos x$
6. $\frac{\arccos(x-2)}{4}$
7. $\frac{\arcsin x + 3}{2}$
8. $2\left[\arcsin\left(x+2\right) , 1\right]$

10. 4
11. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
12. $\frac{4}{3}$
13. 3

16. Antrenman
Sayfa 209-210

1. $5\sqrt{6}$
2. $\frac{4}{3}$
3. $\frac{8}{3}$
4. $\frac{9}{2}$
5. $\frac{\sqrt{6}}{2}$
6. 30
7. $\frac{1}{6}$
8. $\frac{5}{6}$
9. $\frac{1}{8}$
10. $\frac{-1}{4}$

17. Antrenman
Sayfa 211-212

1. 6
2. $\sqrt{11}$
3. $\sqrt{67}$
4. $\frac{3\sqrt{10}}{2}$
5. 14
6. $-\frac{1}{4}$
7. 5
8. $\frac{-1}{29}$
9. 120°
10. 30°
11. $\frac{-1}{4}$
12. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

18. Antrenman
Sayfa 213-214

1. a) $\frac{63}{65}$

c) $-\frac{16}{65}$
d) $\frac{56}{65}$
2. a) –8
b) $-\frac{4}{7}$
c) $-\frac{1}{8}$
d) $-\frac{7}{4}$
3. a) $2+\sqrt{3}$
b) $2-\sqrt{3}$
c) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
d) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
4. a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{2}$
c) 0
d) $\frac{1}{2}$
e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
f) $\sqrt{3}$

19. Antrenman
Sayfa 215-216

1. 1
2. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
3. $\frac{1}{2}$
4. $\frac{1}{2}$
5. cosec5x
6. sec 5a
7. $\tan 70^\circ$
8. 1
9. 8
10. $\frac{7}{4}$
11. –3
12. 1
13. 2
14. $\frac{-16}{65}$

20. Antrenman
Sayfa 217-218

1. 5

3. 8
4. $\frac{11}{7}$
5. 3
6. $\frac{9}{19}$
7. 2
8. 2
9. $\frac{63}{65}$
10. 8
11. $-\frac{4}{3}$
12. $\frac{16}{65}$

21. Antrenman
Sayfa 219-220

1. a) $\frac{1}{2}$
b) $\sin 20^\circ$
c) $\cos 150^\circ$
d) $\cos\frac{\pi}{4}$
e) $\cos 30^\circ$
f) $\tan 30^\circ$
2. $-\frac{7}{9}$
3. $\frac{3}{4}$
4. $\frac{24}{7}$
5. $\frac{1}{9}$
6. $-\frac{7}{25}$
7. $1-2a$
8. $2a^2-1$
9. $\frac{4}{5}$

22. Antrenman
Sayfa 221-222

1. $\frac{1}{3}$
2. $\frac{2}{5}$
3. tan2x
4. 1
5. cosx
6. 1–a

8. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
9. $\tan 40^\circ$
10. $-\cot^2 x$
11. $\cot x$
12. $\tan x$
13. $\frac{-3}{4}$
14. $\frac{3}{5}$
15. $\frac{1}{m}$

23. Antrenman
Sayfa 223-224

1. $4\sin 16^\circ$
2. $2\cos x$
3. 1
4. 4
5. 2
6. $2\cot 2a$
7. 2
8. $2\cot 32^\circ$
9. $\frac{5}{8}$
10. $-\frac{3}{4}$
11. $-\frac{3}{4}$
12. $\frac{4}{5}$
13. $\frac{\sqrt{5}}{3}$
14. $\frac{9}{8}$
15. $-\frac{120}{119}$
16. $-\frac{7}{25}$

24. Antrenman
Sayfa 225-226

1. $\frac{119}{169}$
2. $\frac{24}{25}$
3. $-\frac{4}{3}$
4. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

6. $\frac{7}{9}$
7. $\frac{3}{4}$
8. $\frac{1}{8}$
9. $\frac{-1}{8}$
10. $\frac{\sqrt{70}}{10}$
11. $\frac{1}{3}$
12. $\frac{1}{2}$

25. Antrenman
Sayfa 227-228

1. $\sqrt{3}$
2. -1
3. $\cot 6^\circ$
4. $2\cos 75^\circ$
5. $2\cos x$
6. $-2\sin 5x$
7. $-\frac{7}{8}$
8. $\frac{1}{\sqrt{3}}$
9. 1
10. $\cot 6x$

26. Antrenman
Sayfa 229 - 230

1. $\tan 2x$
2. $\frac{-\cos A}{\sin 3A}$
3. $2\sin 2x$
4. 2
5. 2
6. 1
7. -1
8. $-\cot 2x$
9. $\cot 40^\circ$
10. $\tan 5x$
11. $\cot 6x$
12. $\tan 4x$
13. $\cot 5x$
14. $\frac{1}{m}$
15. $\sqrt{3}$

27. Antrenman
Sayfa 231 - 232

1. 60°

3. 30°
4. 120°
5. 20°
6. 150°
7. 35°
8. 30°
9. $\frac{\pi}{8}$
10. 12°
11. 30°

28. Antrenman
Sayfa 233 - 234

1. 105°
2. 30°
3. 45°
4. $\frac{\pi}{6}$
5. 45°
6. 20°
7. 12°
8. 60°
9. 2°
10. 35°

29. Antrenman
Sayfa 234 - 235

1. 10°
2. 60°
3. 30°
4. 15°
5. 30°
6. 10°
7. 60°
8. 30°
9. 60°
10. $\frac{3\pi}{2}$
11. 330°
12. 30°

KARMAŞIK SAYILAR

1. Antrenman
Sayfa 239 - 240

1. $2i$

4. $8i$
5. $\sqrt{5}i$
6. $7i$
7. -2
8. -2
9. 8
10. $-i$
11. 1
12. $-2i$
13. i
14. i
15. 0
16. 1

2. Antrenman
Sayfa 241 - 242

1. $-i$
2. 0
3. -1
4. $-i$
5. $-i$
6. i
7. i
8. -1
9. -1
10. -1
11. -1
12. 0
13. -1
14. 0
15. 504
16. 1
17. $1+i$

3. Antrenman
Sayfa 243 - 244

1. -1
2. -8
3. 5
4. 6
5. a) $2+3i$
b) $-2-4i$
c) $-3i$
d) -5
6. a) $-2+6i$
b) $8+6i$
7. $7-12i$
8. $2+4i$
9. $-2-14i$
10. $9+i$
11. $4-2i$

4. Antrenman
Sayfa 245 - 246

1. $8+i$
2. $7-i$
3. $15-5i$
4. $-3+4i$
5. $2-4i$

8. $-1+8i$
9. 0
10. 0
11. $-4i$
12. -8
13. -8
14. $16i$
15. $32-32i$
16. 29

5. Antrenman
Sayfa 247 - 248

1. 13
2. 20
3. 2
4. 125
5. $\frac{23-14i}{29}$
6. $\frac{1}{2}$
7. $\frac{7}{2}$
8. $\frac{7}{5}$
9. 2
10. 1
11. $\frac{11-2i}{5}$
12. $\frac{4i}{5}$
13. 3
14. $2i$

6. Antrenman
Sayfa 249 - 250

1. $\frac{12}{5}$
2. -2
3. $-\frac{2}{5}$
4. $-2i$
5. 7
6. 7
7. 15
8. -12
9. -8
10. -16
11. $1+2i$
12. $-\frac{7}{4}$
13. 12
14. -14
15. 7

7. Antrenman
Sayfa 251 - 252

1. -3
2. $\frac{7}{8}$
3. $\frac{3}{2}$
4. 13
5. 3
6. -3
7. 5
8. 3
9. $2\sqrt{5}$
10. 5
11. 4
12. 2
13. 23

8. Antrenman
Sayfa 253 - 254

1. 10
2. 2
3. 1
4. 4
5. 1
6. $\sqrt{2}$
7. 20
8. 13
9. 3
10. $2\sqrt{2}$
11. $\frac{1}{5}$
12. $\frac{1}{5^4}$
13. $\frac{1}{10}$

9. Antrenman
Sayfa 255 - 256

1. $\frac{1}{16}$
2. 1
3. 1
4. 1
5. $2\sqrt{10}$
6. $\frac{13}{\sqrt{2}}$
7. 2
8. 25
9. 2
10. $\frac{3}{2}$
11. 13
12. $\sqrt{17}$

10. Antrenman
Sayfa 257- 258

1. $2\sqrt{5}$
2. 3
3. 5
4. $(x-1)^2+y^2=1$
5. $2x+1=0$
6. $y=-x$
7. $y=-x$
8. $x^2+y^2=9$
9. $x^2+y^2=4$
10. $(x-3)^2+(y-5)^2=4$

11. Antrenman
Sayfa 259 - 260

1. $(x-3)^2+(y+4)^2=9$
2. $(x+2)^2+(y-2)^2=16$
3. $(x+5)^2+(y+3)^2=25$
4. $\frac{4}{3}$
5. 45°
6. 120°
7. 210°

12. Antrenman
Sayfa 261-262

1. 60°
2. 315°
3. 60°
4. 120°
5. $\sqrt{2}\text{cis}45^\circ$
6. $2\text{cis}120^\circ$
7. $2\text{cis}210^\circ$
8. $2\text{cis}135^\circ$
9. $\sqrt{3}\text{cis}330^\circ$
10. $3\text{cis}60^\circ$
11. $\text{cis}300^\circ$
12. $\text{cis}90^\circ$
13. $4\text{cis}180^\circ$
14. $3\text{cis}270^\circ$
15. $\text{cis}270^\circ$
16. $4\text{cis}300^\circ$

13. Antrenman
Sayfa 263 - 264

1. $3+3\sqrt{3}i$
2. $-\sqrt{3}+3i$
3. $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$

5. $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$
6. $-\sqrt{3}+i$
7. $3+3\sqrt{3}i$
8. $-2\sqrt{3}+2i$
9. $2i$
10. $1+i$
11. $3+\sqrt{3}i$
12. $\frac{-\sqrt{3}-i}{2}$
13. $-18+18\sqrt{3}i$
14. $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$

14. Antrenman
Sayfa 265-266

1. $\text{cis}80^\circ$
2. -6
3. $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$
4. $3+3\sqrt{3}i$
5. $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$
6. $1+\sqrt{3}i$
7. $4+4\sqrt{3}i$
8. i
9. $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$
10. $8-8\sqrt{3}i$
11. 1
12. $\frac{243-243\sqrt{3}i}{2}$
13. i
14. $\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

15. Antrenman
Sayfa 267- 268

1. $4\text{cis}\frac{3\pi}{7}$
2. $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$
3. $-i$
4. $4\sqrt{3}\text{cis}120^\circ$
5. $2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$
6. $-3+3\sqrt{3}i$
7. $-2\sqrt{3}$
8. $2i$
9. $3\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$
10. $1+6i$
11. $2\text{cis}30^\circ$, $2\text{cis}210^\circ$

16. Antrenman Sayfa 269 - 270

1. $3cis20°$, $3cis200°$
2. $3cis\frac{\pi}{8}$, $3cis\frac{9\pi}{8}$
3. $2cis45°$, $2cis225°$
4. $cis45°$, $cis225°$
5. $cis165°$, $cis345°$
6. 2
7. $\{3cis135°, 3cis315°\}$,
8. 4
9. 4
10. $2cis60°$, $2cis180°$, $2cis300°$
11. $\{2cis30°, 2cis150°, 2cis270°\}$
12. $\{2cis100°, 2cis220°, 2cis340°\}$

LOGARİTMA

1. Antrenman Sayfa 273-274

1. a) $\log_2 3$
   b) $\log_3 6$
   c) 3
   d) $\log_7 20$
2. a) 2^3
   b) 3^4
   c) 1
   d) 6
3. $\log_3 2+2$
4. $\log_5 12$
5. $\log_2 5+3$
6. $\log_3 5-2$
7. $2\log_5 2$
8. $\log_2 4-1$
9. 9
10. 9
11. 7
12. 4
13. 25
14. −77

2. Antrenman Sayfa 275-276

1. 3
2. 5
3. 20
6. 9
7. $\frac{3}{2}$
8. 16
9. 2
10. $\frac{4}{3}$
11. 12
12. 6
13. 2
14. 2

3. Antrenman Sayfa 277-278

1. 18
2. 2
3. e^2-1
4. $e+1$
5. 2
6. 2
7. 6
8. 1
9. 1
10. 2
11. 1
12. 3
13. a) 3
    b) 2
    c) 4
    d) 2
14. a) −2
    b) 2
    c) $-\frac{5}{2}$
    d) 4
    e) $-\frac{1}{4}$
    f) 6

4. Antrenman Sayfa 279-280

1. 3
2. 6
3. 4
4. 6
5. 5
6. $\frac{5}{6}$
7. $\frac{5}{2}$
8. $-\frac{3}{2}$
9. 1
10. 14
11. −2
14. −6
15. 20
16. $\frac{1}{3}$
17. $\frac{3}{2}$
18. $\frac{1}{6}$
19. $\frac{1}{3}$
20. 1

5. Antrenman Sayfa 281-282

1. a
2. $\frac{3x}{2}$
3. 18
4. 36
5. $\frac{2+m}{m}$
6. 1
7. 1
8. 1
9. 3
10. 8
11. 1
12. 1
13. 0
14. −1
15. 3

6. Antrenman Sayfa 283-284

1. $\frac{3}{2}$
2. $2b+a$
3. $2a+2b$
4. $3x+2y$
5. $3x+2y$
6. $x+y-1$
7. 2,857
8. −0,921
9. −4,62
10. $y-z-1$
11. 21
12. $\frac{19}{2}$
13. 21
14. e^2

7. Antrenman Sayfa 285 - 286

1. $\frac{2a}{b}$
2. $\frac{y}{x}$
3. $\frac{v}{u}$
4. $\frac{x+y}{2y}$
5. $\frac{b+a}{1+b}$
6. $\frac{2+u}{1+u}$
7. $\frac{1}{1+a}$
8. $\frac{x}{x+1}$
9. yx
10. $\frac{1}{2ab}$
11. $\frac{3a+b}{a+b}$
12. $\frac{a+b}{1+a}$

8. Antrenman Sayfa 287- 288

1. 1
2. 1
3. 1
4. 1
5. 1
6. 1
7. 1
8. 1
9. 2
10. 1
11. 6
12. $\frac{2}{3}$
13. 6
14. $\frac{2}{3}$
15. 6
16. 36

9. Antrenman Sayfa 289-290

1. $(2,\infty)$
2. $(-\infty,5)$

5. 12
6. (2,6)
7. (-3,5)
8. 5
9. $(-\infty,7)-\{1\}$
10. 15

10. Antrenman Sayfa 291-292

1. 6^x
2. 3^{x-2}
3. 5^x+2
4. $\frac{3^x-1}{2}$
5. $\frac{6^x+3}{4}$
6. 4.3^x-2
7. $3e^x+4$
8. $5^{x+3}+2$
9. $2^{3x}+4$
10. $10^{2x}-2$
11. $\log_3 x$
12. $\log_2\left(\frac{x}{5}\right)$
13. $\log_2 x+3$
14. $\log_5 x-1$
15. $\log_2(x+3)$
16. $\frac{\log_2(x+1)}{3}$

11. Antrenman Sayfa 293-294

1. 2
2. 8
3. 2
4. $\frac{9}{4}$
5. −1
6. 5
7. 2
8. 2
9. $-\frac{3}{2}$

12. Antrenman Sayfa 295-296

1. (2,3)
2. (1,2)
3. (0,1)
6. (6,7)
7. (2,3)
8. (0,1)
9. 1,903
10. −1,194
11. 1,255
12. 2,079
13. −2,569
14. $b<c<a$
15. $x<y<z$
16. $z<x<y$
17. $a<b<c$

13. Antrenman Sayfa 297-298

1. 16
2. 10
3. 66
4. 20
5. 29
6. 74
7. 2
8. 3
9. $\log_4 3$
10. $\log_4 3+1$
11. $\log_3 2$

14. Antrenman Sayfa 299-300

1. 2
2. $\log_5\left(\frac{5}{6}\right)$
3. log20
4. 0
5. 3
6. $\log_3 4$
7. 1
8. $\log_3 8$
9. 2
10. 1
11. 9
12. {4}
13. $\frac{1}{4}$
14. 10
15. 3
16. 6

15. Antrenman Sayfa 301-302

1. 4
2. 6
3. 10
4. 3
5. 5
6. 7
7. 4
8. 3
9. 4
10. 2
11. $\frac{5}{2}$
12. $\frac{10}{3}$
13. ∅
14. 3

16. Antrenman Sayfa 303-304

1. $\left\{\frac{1}{4}\right\}$
2. 12
3. {0,3}
4. $(4,\infty)$
5. $[6,\infty)$
6. $\left[\frac{7}{2},\infty\right)$
7. $\left(\frac{7}{6},\infty\right)$
8. $\left(\frac{4}{3},3\right)$
9. (4,29)
10. $\left(1,\frac{5}{3}\right)$
11. $\left(\frac{1}{3},\frac{11}{6}\right)$
12. $\left(-\frac{3}{4},\infty\right)$

17. Antrenman Sayfa 305-306

1. $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]$
2. $\left(2,\frac{8}{3}\right)$
3. $(-1,1]$
4. $\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right]$
7. $(3,\infty)$
8. $(3,\infty)$
9. (1,9)
10. $\left(\frac{1}{2},13\right)$
11. $[7,\infty)$
12. (2,8]
13. 10
14. 8
15. (3,4)

PERMUTASYON

1. Antrenman Sayfa 309 - 310

1. 30
2. 44
3. 11
4. 64
5. 120
6. 40
7. 56
8. 90
9. $\frac{9}{7}$
10. n^2-n
11. n
12. 9
13. 5
14. 8
15. 4
16. 6
17. 5
18. 9
19. 2

2. Antrenman Sayfa 311-312

1. 6
2. 30
3. 20
4. 15
5. 210

3. Antrenman Sayfa 313-314

1. 54
2. 360
3. 8
4. 24
5. 12
6. 144
7. 14
8. 19
9. 2^{10}

11- 3^4
12. 5^3
13. 343
14. 147
15. 196
16. 49
17. 245
18. 245
19. 105

4. Antrenman
Sayfa 315-316

1. 180
2. 90
3. 90
4. 60
5. 107
6. 108
7. 59
8. 53
9. 120
10. 60
11. 60
12. 20
13. 80
14. 60
15. 30
16. 100
17. 52
18. 48
19. 36
20. 60
21. 40
22. 31
23. 28
24. 65
25. 40
26. 60
27. 1992
28. 12

5. Antrenman
Sayfa 317-318

1. 6!
2. 5!
3. 11!
4. 4!
5. 4!
6. 4!
7. 4!
8. 5!
9. 6!
10. 8
11. 13
12. n+2

6. Antrenman
Sayfa 319-320

1. n+2
2. 54
3. 24

7. 1320
8. 20
9. 60
10. 210
11. 5040
12. 840
13. 6
14. 6
15. 9!
16. 6
17. 4!
18. 6
19. 24

7. Antrenman
Sayfa 321-322

1. 11!
2. 5!
3. 8!
4. 7!
5. 13!
6. 3!.4!.3!.6!
7. 2!.2!.6!
8. 4!.2!.2!.2!.2!
9. 5!.3!
10. 6!.3!
11. 6!.2!
12. 10!.4!
13. 6!–5!.2!

8. Antrenman
Sayfa 323-324

1. 4!.2!
2. 3!.3!
3. 5!
4. 6!
5. 4!.2!
6. 3!.5!
7- 4!–3!.2!
8. 12
9. 3!.2!.2!.2!.2!
10. 5!.5!
11. 6!–5!.2!
12. 3!.4!
13. 12
14. 210

9. Antrenman
Sayfa 325-326

1. 90
2. 560
3. 10
4. 60
5. 60
6. 140

9. 35
10. 120
11. 20

KOMBİNASYON

1. Antrenman
Sayfa 327-328

1. 30
2. 38
3. 52
4. 5
5. 15
6. 15
7. 56
8. 120
9. 84
10. 66
11. 35
12. 3
13. 30
14. 20
15. 3 veya 6

2. Antrenman
Sayfa 329-330

1. 15
2. 24
3. $\binom{15}{1}.\binom{14}{2}$
4. $\binom{4}{2}.\binom{5}{1}$
5. 56
6. 10
7. 40
8. 20
9. 24
10. 8
11. 26
12. 15
13. 60
14. 18
15. 40
16. 120

3. Antrenman
Sayfa 331-332

1. 36
2. 81
3. 10
4. 3
5. 10
6. 4
7. 10
8. 4

4. Antrenman
Sayfa 333-334

1. 9
2. 4
3. 18
4. 10
5. 35
6. 8
7. 20
8. 70
9. 15
10. 80
11. 31
12. 121
13. 46
14. 50

5. Antrenman
Sayfa 335-336

1. 74
2. 50
3. 70
4. 20
5. 72
6. 36
7. 7200
8. 90
9. 21
10. 15
11. 26
12. 17

6. Antrenman
Sayfa 337-338

1. a) 20
   b) 15
2. a) 28
   b) 56
3. 4
4. 10
5. 30
6. 13
7. 6
8. 20
9. 24
10. 42
11. 30
12. 30
13. 39

7. Antrenman
Sayfa 339-340

1. 51
2. 69
3. 15
4. 10
5. 21
6. 9
7. 15
8. 35
9. 31

BİNOM AÇILIMI

1. Antrenman
Sayfa 341-342

1. 9
2. 5
3. 9
4. 9
5. 8

2. Antrenman
Sayfa 343-344

1. 5
2. 1
3. 1
4. 3
5. $\binom{14}{6}$
6. $-\binom{23}{9}$
7. $\binom{8}{4}$
8. 108
9. 15
10. 10
11. – 80
12. 44
13. – 76
14. 10
15. 60
16. - 32

3. Antrenman
Sayfa 345-346

1. 80
2. 64
3. 126
4. 91
5. 80
6. -160
7. 672
8. 80
9. 24
10. 81
11. 18
12. 24
13. – 9
14. – 80
15. 14
16. 80

OLASILIK

1. Antrenman
Sayfa 347-348

1. 6
2. 36

6. 125
7- 5!
8. 2^6
9. 3
10. 10
11. 6
12. 12

2. Antrenman
Sayfa 349-350

1. 2
2. 60
3. 48
4. 15
5. 46
6. 15
7- 5!.2!
8. $\frac{1}{2}$
9. $\frac{1}{4}$
10. $\frac{1}{12}$
11. $\frac{1}{6}$
12. $\frac{3}{10}$
13. $\frac{1}{3}$

3. Antrenman
Sayfa 351-352

1. $\frac{3}{7}$
2. $\frac{5}{8}$
3. $\frac{4}{7}$
4. $\frac{4}{9}$
5. $\frac{4}{7}$
6. $\frac{1}{7}$
7. $\frac{3}{7}$
8. $\frac{5}{14}$
9. $\frac{1}{12}$
10. $\frac{5}{28}$

12. $\frac{10}{21}$
13. $\frac{2}{7}$
14- $\frac{1}{4}$
15. $\frac{2}{7}$
16. $\frac{4}{7}$

4. Antrenman
Sayfa 353-354

1. $\frac{8}{21}$
2. $\frac{9}{28}$
3. $\frac{2}{5}$
4. $\frac{1}{2}$
5. $\frac{15}{64}$
6. $\frac{2}{5}$
7. $\frac{1}{7}$
8. $\frac{1}{5}$
9. $\frac{3}{8}$
10. $\frac{1}{6}$
11. $\frac{1}{3}$
12. $\frac{1}{2}$
13. $\frac{1}{5}$
14- $\frac{1}{10}$
15. $\frac{1}{5}$
16. $\frac{1}{5}$

5. Antrenman
Sayfa 355-356

1. $\frac{6}{7}$
2. $\frac{24}{35}$
3. $\frac{3}{4}$

5. $\frac{2}{5}$
6. $\frac{15}{31}$

6. Antrenman
Sayfa 357-358

1- $\frac{2}{5}$
2. $\frac{1}{4}$
3. $\frac{7}{8}$
4. $\frac{34}{35}$
5. $\frac{1}{7}$
6. $\frac{2}{3}$
7. $\frac{1}{3}$
8. $\frac{13}{25}$
9. $\frac{3}{14}$
10. $\frac{1}{2}$
11. $\frac{4}{11}$
12. $\frac{1}{7}$
13. $\frac{9}{17}$

7. Antrenman
Sayfa 359-360

1. $\frac{1}{4}$
2. $\frac{1}{4}$
3. $\frac{1}{6}$
4. $\frac{1}{48}$
5. $\frac{8}{49}$
6. $\frac{1}{3}$
7. $\frac{1}{12}$
8. $\frac{5}{12}$

8. Antrenman
Sayfa 361-362

1. $\frac{3}{4}$
2. $\frac{7}{12}$
3. $\frac{5}{7}$
4. $\frac{43}{49}$
5. $\frac{1}{5}$
6. $\frac{1}{24}$
7. $\frac{7}{20}$

9. Antrenman
Sayfa 363-364

1. $\frac{13}{20}$
2. $\frac{27}{49}$
3. $\frac{31}{72}$
4. $\frac{3}{10}$
5. $\frac{15}{56}$
6. $\frac{4}{35}$
7. 12
8. $\frac{1}{6}$
9. $\frac{1}{5}$
10. $\frac{2}{3}$
11. $\frac{2}{5}$
12. $\frac{3}{4}$

MATRİS VE DETERMİNANT

1. Antrenman
Sayfa 367-368

1. 1
2. – 2
3. 2
4. 24

2. Antrenman
Sayfa 369-370

1. 4
2. 10
3. 7
4. – 4
5. 5
6. 7
7. 11
8. $A^T = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

   $B^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$
9. 3
10. 16
11. 8
12. 72

3. Antrenman
Sayfa 371-372

1. 2
2. 2
3. 4
4. – 3
5. 1
6. 1
7. 5
8. –8
9. 20
10. $\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$
11. –3

4. Antrenman
Sayfa 373-374

1. $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
3. 5
4. –12
5. $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$
6. $\begin{bmatrix} 5 & 18 \\ -12 & -1 \end{bmatrix}$
7. $\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$
8. 10
9. $\begin{bmatrix} -7 & 5 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} -7 & -13 & 2 \\ 4 & 0 & 9 \end{bmatrix}$
11. 2
12. $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ -5 & -5 & 6 \\ -5 & 3 & -5 \end{bmatrix}$

5. Antrenman
Sayfa 375-376

1. $\begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 11 & -4 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$
3. 8
4. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$
5. $\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$
6. $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$
7. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$
8. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -12 \end{bmatrix}$
9. $\begin{bmatrix} -12 \\ 27 \\ 3 \end{bmatrix}$
10. $\begin{bmatrix} 2 & -20 \\ -3 & 26 \end{bmatrix}$

6. Antrenman
Sayfa 377-378

1. $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 20 & -4 \end{bmatrix}$
2. 10
3. 1
4. 51
5. –17
6. 2
7. 14
8. 3
9. 5
10. $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$
11. 2+i

7. Antrenman
Sayfa 379 - 380

1. $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} -16 & 6 \\ 12 & -4 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
4. 64
5. $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
6. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
7. $\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$
8. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
9. $\begin{bmatrix} 1 & -4024 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. Antrenman
Sayfa 381-382

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 244 & 1 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 3^{15} & 0 \\ 0 & 2^{15} \end{bmatrix}$
3. $2^{2014}.I$
4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$
5. A
6. $-2^{45}.I$
7. $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$
8. $\begin{bmatrix} 13 & -14 \\ -7 & 13 \end{bmatrix}$
9. $\begin{bmatrix} 52 & 22 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$
10. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$
11. $\begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 21 \end{bmatrix}$
12. $\begin{bmatrix} 8 & 14 \\ 28 & 50 \end{bmatrix}$

CEVAPLAR

9. Antrenman
Sayfa 383-384

1. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$
4. $-\frac{1}{3}$
5. 8
6. $\begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$
7. $\begin{bmatrix} -11 & -10 \\ -6 & -6 \end{bmatrix}$
8. $\begin{bmatrix} -8 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$
9. $\begin{bmatrix} 6 & -11 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

10. Antrenman
Sayfa 385-386

1. $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -5 & -16 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} -11 & -7 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$
5. $\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$
6. –1
7. 126
8. 4
9. 4

11. Antrenman
Sayfa 387-388

1. – 3
2. – 2
3. – 17
4. –17
5. – 9
6. 7
7. –7
8. 1
9. –1

12. 10
13. –8
14. 6
15. 1
16. 3

12. Antrenman
Sayfa 389-390

1. 1
2. – 2
3. – 2
4. b + c – a
5. – 4
6. – 26
7. – 10
8. – 10
9. 5
10. – 2i
11. – 2
12. – 8

13. Antrenman
Sayfa 391-392

1. 2
2. 14
3. 1
4. – 8
5. $\frac{1}{68}$
6. $\frac{-1}{30}$
7. – 16
8. – 32
9. 70
10. 0
11. – 18
12. 0

14. Antrenman
Sayfa 393-394

1. 0
2. 0
3. – 612
4. 81
5. – 20
6. – 24
7. $\frac{1}{2}$
8. – 3
9. 7
10. 0

15. Antrenman
Sayfa 395-396

1. $\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$
5. 6
6. –5
7. $\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$
8. $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$
9. $\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$
10. $\begin{bmatrix} a & -a-1 \\ 1-a & a \end{bmatrix}$
11. $\frac{1}{2}$
12. $\frac{11}{2}$
13. 4